LINEÁRNÍ ALGEBRA A GEOMETRIE

Jiří Pytlíček

2008
České vysoké učení technické v Praze

ISBN 978-80-01-04063-8

Předmluva

Toto skriptum je určeno posluchačům prvního ročníku FJFI. Vzniklo na základě přednášek, které jsem po řadu let konal. Zcela pokrývá látku přednášenou v základním kursu lineární algebry. Jeho úkolem je usnadnit studentům sledování této přednášky a pomoci v přípravě na zkoušku. Protože neobsahuje žádné příklady, nemůže v žádném případě nahradit cvičení k této přednášce.

Základním objektem, se kterým se v tomto skriptu pracuje, je vektorový prostor. Po zavedení elementárních pojmů lineární algebry (vektorový prostor, lineární závislost, báze, dimenze, podprostor, lineární zobrazení) vyústí první část v řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Druhá část je pak teorií lineárních operátorů na vektorových prostorech (a později i na prostorech se skalárním součinem) a souběžně s ní je probírána teorie matic. Kromě toho skriptum obsahuje i základy lineární geometrie.

Studium lineární algebry nevyžaduje žádné předběžné znalosti (kromě základních pojmů svázaných s pojmem zobrazení), předpokládá však alespoň minimální úroveň abstraktního myšlení, bez něhož nelze tuto partii matematiky studovat.

Závěrem bych chtěl poděkovat svým kolegům Ing. Martinu Stýblovi a Ing. Editě Pelantové, CSc. za všechny práce spojené s přípravou skripta k publikaci.

Praha, květen 1997

Autor

Obsah

1. Vektorový prostor

V celém textu budeme používat následující označení číselných množin:

$\mathcal{N}$... množina přirozených čísel,
$\mathcal{N}_0$... množina přirozených čísel včetně nuly,
$\mathcal{Z}$... množina celých čísel,
$\mathcal{Q}$... množina racionálních čísel,
$\mathcal{R}$... množina reálných čísel,
$\mathcal{C}$... množina komplexních čísel.

Dále zavedeme pro $n \in \mathcal{N}$ zkrácený zápis

$$\hat{n} = \{1, \ldots, n\}.$$

Připomeňme dva důležité pojmy. **Kartézský součin** 2 množin A, B je množina uspořádaných dvojic:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Zobrazení $f : A \mapsto B$ je taková podmnožina $A \times B$, pro kterou platí:

$$(\forall a \in A)(\exists_1 b \in B)((a, b) \in f),$$

což zapisujeme $f(a) = b$. Definičním oborem zobrazení $f : A \mapsto B$ je tedy zde míněna celá množina A; jiný případ v textu nenastane.

Definice 0: *Množinu $T \subset \mathcal{C}$, která je alespoň dvouprvková, nazveme* **číselným tělesem**, *právě když platí (axiómy tělesa):*

(1) $(\forall \alpha \in T)(\forall \beta \in T)(\alpha + \beta \in T)$,
(2) $(\forall \alpha \in T)(\forall \beta \in T)(\alpha\, \beta \in T)$,
(3) $(\forall \alpha \in T)(-\alpha \in T)$,
(4) $(\forall \alpha \in T)(\alpha \neq 0)(1/\alpha \in T)$.

Poznámka 0:

(1) Axiómy tělesa znamenají uzavřenost T vůči sčítání a násobení čísel, opačnému číslu a převrácené hodnotě.

(2) $\mathcal{N}, \mathcal{Z}$ nejsou tělesa, $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ jsou tělesa. $\mathcal{Q}$ je nejmenší číselné těleso ve smyslu inkluze.

Prvky tělesa budeme vždy značit **řeckými** písmeny.

Definice 1: *Nechť jsou dány:*

(1) číselné těleso T,
(2) neprázdná množina V,
(3) zobrazení $\oplus : V \times V \mapsto V$,
(4) zobrazení $\odot : T \times V \mapsto V$.

Prvky množiny V budeme nazývat vektory, zobrazení $\oplus$ nazýváme sčítání vektorů a zobrazení $\odot$ násobení vektorů (číslem z tělesa). Řekneme, že V je **vektorový prostor nad tělesem** *T s vektorovými operacemi $\oplus$ a $\odot$, právě když platí (axiómy vektorového prostoru):*

S1: komutativní zákon pro $\oplus$:

$$(\forall a \in V)(\forall b \in V)(a \oplus b = b \oplus a),$$

S2: asociativní zákon pro $\oplus$:

$$(\forall a \in V)(\forall b \in V)(\forall c \in V)(a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c),$$

S3: $(\exists \theta \in V)(\forall a \in V)(a \oplus \theta = a)$, *toto θ nazveme* **nulový vektor**,

S4: $(\forall a \in V)(\exists b \in V)(a \oplus b = \theta)$, *toto b nazveme* **vektor opačný** *k vektoru a, značíme $b = -a$,*

N1: asociativní zákon pro $\odot$:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \beta \in T)(\forall a \in V)(\alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\, \beta) \odot a),$$

N2: $(\forall a \in V)(1 \odot a = a)$,

D1: distributivita $\odot$ vzhledem ke sčítání čísel:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \beta \in T)(\forall a \in V)((\alpha + \beta) \odot a = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a)),$$

D2: distributivita násobení číslem vzhledem k $\oplus$:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall a \in V)(\forall b \in V)(\alpha \odot (a \oplus b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)).$$

Poznámka 1:

(1) Při definici vektorového prostoru musíme vždy uvést všechno: množinu V, číselné těleso T, zobrazení $\oplus$ a $\odot$. Bude-li potřeba, použijeme pro vektorový prostor označení

$$(V, T, \oplus, \odot).$$

(2) Zobrazení $\oplus$ budeme dále značit jen $+$, stejně jako sčítání čísel. Z kontextu je ale vždy jasné, zda sčítáme 2 vektory nebo 2 čísla. Stejně vektor opačný budeme značit pomocí $-$ místo $\ominus$.

(3) Podobně místo $\odot$ budeme psát $\cdot$ nebo znak operace vynecháme (jako pro násobení čísel).

(4) Existence zobrazení $\oplus : V \times V \mapsto V$ znamená uzavřenost množiny V na součet svých prvků.

(5) Existence zobrazení $\odot : T \times V \mapsto V$ znamená uzavřenost množiny V vzhledem k násobení čísly z T.

Věta 1: *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:*

(1) Ve V existuje právě 1 nulový vektor θ.

(2) Ke každému vektoru z V existuje právě 1 vektor opačný.

(3) Pro každé $(a, b) \in V \times V$ má rovnice $a = b + x$ právě 1 řešení $x = -b + a$.

(4) $(\forall \alpha \in T)(\alpha\, \theta = \theta)$,
$(\forall a \in V)(0\, a = \theta)$.

(5) $(\forall \alpha \in T)(\forall a \in V)(\alpha\, a = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \vee a = \theta))$.

(6) $(\forall \alpha \in T)(\forall a \in V)((-\alpha)\, a = -(\alpha\, a) = \alpha\, (-a))$.

Důkaz:

(1) Z axiómu S3 víme, že existuje nulový vektor. Jeho jednoznačnost dokážeme sporem: Kdyby $\exists \theta_1 \neq \theta_2$ mající obě vlastnost nulového vektoru, pak dle S3:

$$(\forall a \in V)(a + \theta_1 = a \wedge a + \theta_2 = a),$$

odkud pro $a = \theta_1$ a $a = \theta_2$

$$\theta_2 + \theta_1 = \theta_2 \wedge \theta_1 + \theta_2 = \theta_1$$

a z komutativního zákona S1 plyne $\theta_1 = \theta_2$, což je spor s $\theta_1 \neq \theta_2$.

(2) Existenci zajišťuje axióm S4. Jednoznačnost dokážeme sporem: Kdyby

$$(\exists a \in V)(b_1 + a = \theta \wedge b_2 + a = \theta \wedge b_1 \neq b_2),$$

pak s využitím S1, S2, S3 dostaneme:

$$b_2 = b_2 + \theta = b_2 + (a + b_1) = (a + b_2) + b_1 = \theta + b_1 = b_1,$$

což je spor s $b_1 \neq b_2$.

(3) Máme $a = b + x$, ověříme nejdříve, že $x = -b + a$ rovnici vyhovuje:

$$b + x = b + (-b + a) = (b + (-b)) + a = \theta + a = a.$$

Jednoznačnost dokážeme sporem: Kdyby $(\exists y \neq -b + a)(a = b + y)$, pak

$$y = y + \theta = y + (b + (-b)) = (y + b) + (-b) = a + (-b) = -b + a,$$

což je spor.

(4) Vezměme $a \in V, \alpha \in T$ libovolně. Podle (3) má rovnice $\alpha\, a + x = \alpha a$ jediné řešení, přitom vyhovuje $x = \theta$ (S3). Podle D2 je

$$\alpha\, a + \alpha\, \theta = \alpha\, (a + \theta) = \alpha\, a,$$

tedy i $x = \alpha\, \theta$ je řešením rovnice $\alpha\, a + x = \alpha\, a$ a musí proto $\theta = \alpha\, \theta$. Podobně podle D1 je

$$\alpha\, a + 0\, a = (\alpha + 0)\, a = \alpha\, a,$$

odkud dostaneme $\theta = 0\, a$.

(5) Sporem: Kdyby $(\exists \alpha \in T)(\alpha \neq 0)(\exists a \in V)(a \neq \theta)(\alpha\, a = \theta)$, pak s pomocí (4):

$$a = 1 \cdot a = \left(\frac{1}{\alpha}\, \alpha\right) a = \frac{1}{\alpha}\, (\alpha\, a) = \frac{1}{\alpha}\, \theta = \theta,$$

což je spor.

(6) Vezměme $a \in V, \alpha \in T$ libovolně. Nejprve dokážeme $(-\alpha)\, a = -(\alpha\, a)$. Rovnice $\alpha\, a + x = \theta$ má jediné řešení $x = -(\alpha\, a)$. Současně

$$\alpha\, a + (-\alpha)\, a = (\alpha - \alpha)\, a = 0\, a = \theta,$$

odkud musí $-(\alpha\, a) = (-\alpha)\, a$. Podobně

$$\alpha\, a + \alpha\, (-a) = \alpha\, (a + (-a)) = \alpha\, \theta = \theta,$$

odkud musí $-(\alpha\, a) = \alpha\, (-a)$.

Q.E.D.

Poznámka 2: Název vektorový prostor V nad tělesem T budeme speciálně zkracovat pro:

$T = \mathcal{R}$... reálný vektorový prostor,
$T = \mathcal{C}$... komplexní vektorový prostor.

Příklady vektorových prostorů

Buď T číselné těleso.

(1) Prostor $T^n, n \in \mathcal{N}$.

Prvky jsou uspořádané n-tice čísel z tělesa:

$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

kde $(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i \in T)$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazýváme **složky**. Speciálně $T^1 = T$. Operace sčítání vektorů a násobení vektorů číslem provádíme po složkách: Buďte $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, pak pro $\gamma \in T$ definujeme

$$\gamma\, a = (\gamma\, \alpha_1, \ldots, \gamma\, \alpha_n),$$

a součet vektorů definujeme

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

(2) Prostor $T^{m,n}, m, n \in \mathcal{N}$

Prvky jsou následující soubory čísel z tělesa nazývané **matice**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

čísla α_{ij}, kde $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$, nazýváme **prvky matice**. Speciálně prvky prostoru $T^{m,1}$ nazveme sloupcové vektory:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ budeme též nazývat **složky vektoru**. Matice budeme značit velkým tučným písmenem, sloupcové vektory malým tučným písmenem a jejich prvky odpovídajícími malými řeckými nebo latinskými písmeny. Operace sčítání matic a násobení matice číslem z tělesa definujeme po prvcích, podobně jako v (1). Pro nulovou matici resp. nulový sloupcový vektor budeme používat označení $\mathbf{0}$.

(3) Prostor $\mathcal{P}$

Množina všech polynomů. Uvažujeme pro $T = \mathcal{C}$, neboli nad tělesem komplexních čísel. Operace sčítání vektorů a násobení vektoru číslem zavedeme jako sčítání polynomů a násobení polynomů číslem: Buďte a, b polynomy v proměnné $t \in \mathcal{C}$, pak definujeme

$$(a + b)(t) = a(t) + b(t),$$
$$(\gamma\, a)(t) = \gamma\, a(t).$$

(4) Prostor $\mathcal{P}_n, n \in \mathcal{N}$

Množina všech polynomů stupně nejvýše $n - 1$ nebo nedefinovaného (nulový polynom). Uvažujeme pro $T = \mathcal{C}$. Operace stejně jako v (3).

Lze si snadno rozmyslet, že všechny uvedené množiny vyhovují definici vektorového prostoru, tj. axiómům S1,...,S4,N1,N2,D1,D2. Podobně je vektorovým prostorem nad $\mathcal{R}$ počátkem procházející přímka v souřadné rovině.

Zamysleme se, kolik prvků může mít vektorový prostor (nad číselným tělesem). Odpověď zní, že buďto jeden prvek, který musí být nulový vektor, nebo je počet prvků nekonečný. Prostor s jediným nulovým prvkem se nazývá **nulový vektorový prostor**.

Mějme vektorový prostor $(V, T, \oplus, \odot)$. Buď $T_1 \subset T$ také číselné těleso. Definujme zobrazení $\odot_1 = \odot|_{T_1 \times V}$, tj. jako zúžení $\odot$ na $T_1 \times V$. Pak

$$V_{T_1} = (V, T_1, \oplus, \odot_1)$$

je také vektorový prostor.

2. Lineární závislost, báze, dimenze

Definice 2: *Buď V vektorový prostor nad tělesem T.* **Souborem vektorů** *délky n rozumíme uspořádanou n-tici*

$$(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $(\forall i \in \hat{n})(x_i \in V)$.

Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ soubor vektorů z V. **Součet souboru** *$(x_1, \ldots, x_n)$ definujeme*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = ((\ldots(x_1 + x_2) + \ldots) + x_{n-1}) + x_n.$$

Dále definujeme tzv. **prázdný součet** *(pro $j \in \mathcal{Z}$):*

$$\sum_{i=j}^{j-1} x_j = \theta.$$

Vlastnosti součtu souboru: Buďte $(x_1, \ldots, x_n)$ a $(y_1, \ldots, y_n)$ 2 soubory vektorů z V stejné délky n.

(1) Zobecněný asociativní zákon: $(\forall k \in \hat{n} \cup \{0\})$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \right).$$

(2) Zobecněný komutativní zákon: Buď $(k_1, \ldots, k_n)$ permutace množiny $\hat{n}$, pak

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{k_i}.$$

(3)

$$(\forall \alpha \in T) \left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, x_i) \right).$$

(4)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i).$$

Definice 3: *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $x \in V$ a $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že vektor x je* **lineární kombinací** *souboru $(x_1, \ldots, x_n)$, právě když existuje n-tice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ taková, že*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i.$$

Čísla $\alpha_i, i \in \hat{n}$, nazýváme koeficienty lineární kombinace.

Jestliže $(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. *V opačném případě, pokud $(\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq 0)$, jde o lineární kombinace* **netriviální**.

Poznámka 3: Výsledkem triviální lineární kombinace je vždy θ.

Definice 4: *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme* **lineárním obalem** *souboru $(x_1, \ldots, x_n)$ a značíme*

$$[x_1, \ldots, x_n]_\lambda .$$

Věta 2: *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Potom platí:*
(1) $\theta \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$.
(2) $x_{n+1} \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda \Rightarrow [x_1, \ldots, x_n]_\lambda = [x_1, \ldots, x_{n+1}]_\lambda$.
(3) Buď $(k_1, \ldots, k_n)$ permutace množiny $\hat{n}$, potom:

$$[x_1, \ldots, x_n]_\lambda = [x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}]_\lambda .$$

(4) Buďte $x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$, $y \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$, $\alpha \in T$, potom:

$$x + y \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda ,$$
$$\alpha\, x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda .$$

Důkaz:
(1) θ je výsledkem triviální kombinace.
(2) Dokážeme 2 inkluze:
(a) $[x_1, \ldots, x_n]_\lambda \subset [x_1, \ldots, x_{n+1}]_\lambda$:
Když $x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$, existuje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i + 0 x_{n+1},$$

odkud $x \in [x_1, \ldots, x_{n+1}]_\lambda$.
(b) $[x_1, \ldots, x_{n+1}]_\lambda \subset [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$:
Když $x \in [x_1, \ldots, x_{n+1}]_\lambda$, existuje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in T^{n+1}$ tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i + \alpha_{n+1}\, x_{n+1}.$$

Protože $x_{n+1} \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$, existuje $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in T^n$ tak, že

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, x_i,$$

odkud

$$x = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_{n+1} \beta_i)\, x_i$$

a tedy $x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$.

(3) Rovnost obalů plyne ze zobecněného komutativního zákona.

(4) Buďte tedy

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,$$

potom

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) x_i,$$

odkud $x + y \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$. Podobně

$$\gamma x = \sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) x_i,$$

odkud $\gamma x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$.

Q.E.D.

Definice 5: *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ je* **lineárně nezávislý (LN)**, *právě když pouze triviální lineární kombinace tohoto souboru je θ. V opačném případě nazýváme soubor* **lineárně závislý (LZ)**.

Poznámka 4: Alternativní zápis:

(1) $(x_1, \ldots, x_n)$ je LZ právě tehdy, když

$$(\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \wedge \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0 \right).$$

(2) $(x_1, \ldots, x_n)$ je LN právě tehdy, když

$$(\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 0 \right).$$

Věta 3:

(1) (x_1) je LN $\Leftrightarrow x_1 \neq \theta$.

(2) Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V, nechť $\ell \in \hat{n}$ a $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_\ell \leq n$. Potom je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ LN, je také $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_\ell})$ LN.

(3) Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ soubor vektorů z V, $n \geq 2$. Potom $(x_1, \ldots, x_n)$ je LZ právě tehdy, když

$$(\exists i_0 \in \hat{n})(x_{i_0} \in [x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n]_\lambda).$$

Důkaz:

(1) Dokážeme 2 implikace:

(a) $x_1 \neq \theta \Rightarrow (x_1)$ *LN*:

Když $\alpha_1 x_1 = \theta \Rightarrow (\alpha_1 = 0 \vee x_1 = \theta)$, odkud $\alpha = 0$, neboť $x_1 \neq \theta$.

(b) $x_1 = \theta \Rightarrow (x_1)\ LZ$:
Existuje netriviální kombinace, dávající θ, třeba $1 \cdot x_1 = \theta$.

(2) Tvrzení si nejdříve přeformulujeme: $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_\ell})$ je LZ $\Rightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ je LZ. Když $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_\ell})$ je LZ, existuje tedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in T^\ell$ tak, že

$$\left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i\, x_{k_i} = \theta\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{\ell} |\alpha_i| > 0\right).$$

To ale znamená, že existuje netriviální kombinace souboru $(x_1, \ldots, x_n)$ dávající θ, totiž

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, x_i = \theta,$$

kde $\beta_{k_i} = \alpha_i$ pro $i \in \hat{\ell}$ a $\beta_i = 0$ jinak.

(3) Nechť nejdříve platí:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = \theta\right) \wedge (\exists i_0 \in \hat{n})(\alpha_{i_0} \neq 0).$$

Tedy můžeme z rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = \theta$$

vyjádřit x_{i_0} jako lineární kombinaci souboru $(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n)$:

$$x_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \alpha_i\, x_i.$$

Naopak, jestliže lze psát

$$x_{i_0} = \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \alpha_i\, x_i,$$

pak existuje netriviální kombinace souboru $(x_1, \ldots, x_n)$ dávající θ:

$$-x_{i_0} + \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \alpha_i\, x_i = \theta.$$

Q.E.D.

Důsledek 1: *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je LZ soubor vektorů z V, $n \geq 2$. Potom existuje $i_0 \in \hat{n}$ tak, že*

$$[x_1, \ldots, x_n]_\lambda = [x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n]_\lambda.$$

Věta 4: *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je LZ soubor vektorů z V, potom buď*
(1) $x_1 = \theta$ nebo
(2) $n \geq 2$ a existuje $i_0 \in \hat{n} \setminus \{1\}$ takové, že $x_{i_0} \in [x_1, \ldots, x_{i_0-1}]_\lambda$.

Důkaz: Je-li $x_1 \neq \theta$, musí být $n \geq 2$ (viz věta 3). Existuje tedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ tak, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \theta\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0\right).$$

Tvrdíme, že mezi $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ je alespoň 1 číslo nenulové: Kdyby totiž $(\forall i \in \{2, \ldots, n\})(\alpha_i = 0)$, dostaneme

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1,$$

protože $x_1 \neq \theta$, musí $\alpha_1 = 0$, odkud $(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)$, což je spor. Definujme tedy

$$i_0 = \max\{i | \alpha_i \neq 0\},$$

víme už, že $i_0 > 1$. Z rovnosti

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i x_i$$

vyjádříme x_{i_0} jako lineární kombinaci souboru $(x_1, \ldots, x_{i_0-1})$:

$$x_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i x_i.$$

Q.E.D.

Definice 6: *Existuje-li ve V soubor vektorů $(x_1, \ldots, x_n)$ takový, že $[x_1, \ldots, x_n]_\lambda = V$, říkáme, že prostor V je* **konečně generován** *a soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ nazýváme* **generujícím souborem** *prostoru V. Vektory x_i pro $i \in \hat{n}$ nazýváme pak* **generátory** *prostoru V.*

Definice 7: *Existuje-li ve V soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ takový, že*
(1) je LN,
(2) generuje V,
říkáme že prostor V má **konečnou bázi** *a soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ nazýváme* **bází** *prostoru V.*

Definice 8: *Nechť V je vektorový prostor. Označme*

$$N_0(V) = \{n \in \mathcal{N}_0 | \text{každý } n+1\text{−členný soubor vektorů z } V \text{ je LZ}\}.$$

Je-li $N_0(V) = \emptyset$, říkáme, že V **má nekonečnou dimenzi**, *značíme*

$$\dim V = \infty.$$

Je-li $N_0 \neq \emptyset$, říkáme, že V **má konečnou dimenzi** *a definujeme*

$$\dim V = \min N_0(V).$$

Věta 5:
(1) $\dim V = 0 \Leftrightarrow V = \{\theta\}$.
(2) Nulový prostor $\{\theta\}$ *nemá bázi.*
(3) Buď $n \in \mathcal{N}$, *nechť ve* V *existuje* n*-členný LN soubor. Potom* $\dim V \geq n$.
(4) Buď $n \in \mathcal{N}_0$, *nechť ve* V *každý* $n+1$*-členný soubor je LZ. Potom* $\dim V \leq n$.

Důkaz:
(1) Je-li $\dim V = 0$, odkud $0 \in N_0(V)$, pak nutně $V = \{\theta\}$, neboť každý jednočlenný soubor je LZ, což implikuje, že každý vektor z V je nulový. Je-li naopak $V = \{\theta\}$, pak $0 \in N_0(V)$ a tedy $\dim V = 0$.
(2) V nulovém vektorovém prostoru neexistuje LN soubor, tudíž $\{\theta\}$ nemůže mít bázi.
(3) Když existuje n-členný LN soubor, musí $n-1 \notin N_0(V)$, potom také $0, 1, \ldots, n-2 \notin N_0(V)$, neboť podle věty 3 existují LN soubory délky $1, \ldots, n$. Tedy $\dim V \geq n$.
(4) Když každý $n+1$-členný soubor je LZ, je $n \in N_0(V)$ a tedy $\dim V \leq n$.

Q.E.D.

Věta 6 (Steinitzova o výměně): *Nechť* $(x_1, \ldots, x_n)$ *a* $(y_1, \ldots, y_m)$ *jsou soubory vektorů z* V. *Nechť* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je LN, nechť* $(\forall i \in \hat{n})(x_i \in [y_1, \ldots, y_m]_\lambda)$. *Potom platí*
(1) $n \leq m$, *tj. délka LN souboru nemůže převýšit počet generátorů.*
(2) Existují navzájem různé indexy $i_1, \ldots, i_n \in \hat{m}$ *takové, že*

$$[y_1, \ldots, y_m]_\lambda = [x_1, \ldots, x_n, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_n\})]_\lambda .$$

Důkaz: Označme

$$L = [y_1, \ldots, y_m]_\lambda ,$$

$$\ell = \min\{m, n\}.$$

Lemma: *Pro každé* $k \in \hat{\ell}$ *existují navzájem různé indexy* $i_1, \ldots, i_k \in \hat{m}$ *takové, že*

$$L = [x_1, \ldots, x_k, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\})]_\lambda .$$

Důkaz: Lemma dokážeme neúplnou indukcí.

Pro $k = 1$: Víme, že $x_1 \in L$, odkud

$$L = [x_1, y_1, \ldots, y_m]_\lambda .$$

Soubor $(x_1, y_1, \ldots, y_m)$ je tedy LZ a podle věty 4 existuje index $i_1 \in \hat{m}$ takový, že

$$y_{i_1} \in [x_1, y_1 \ldots, y_{i_1 - 1}]_\lambda$$

a proto

$$L = [x_1, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1\})]_\lambda .$$

Pro $1 \leq k < \ell$ nechť platí indukční předpoklad: existují navzájem různé indexy $i_1, \ldots, i_k \in \hat{m}$ takové, že

$$L = [x_1, \ldots, x_k, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\})]_\lambda .$$

Víme, že $x_{k+1} \in L$, proto opět

$$L = [x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\})]_\lambda .$$

Soubor $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}))$ je LZ a proto podle věty 4 existuje index $i_{k+1} \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ takový, že vektor $y_{i_{k+1}}$ lze nakombinovat z jistých vektorů tohoto souboru a proto

$$L = [x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}\})]_\lambda .$$

Tím je lemma dokázáno.

Q.E.D.

Vlastní důkaz Steinitzovy věty:

(1) Sporem: Nechť $n > m$. Potom je $\ell = m$. Tvrzení lemmatu pro $k = m$ říká, že existují navzájem různé indexy $i_1, \ldots, i_m \in \hat{m}$ takové, že

$$L = [x_1, \ldots, x_m, (y_i | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\})]_\lambda .$$

Množina $\hat{m} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$ je ovšem prázdná, a tedy

$$L = [x_1, \ldots, x_m]_\lambda .$$

Podle předpokladů věty je $(\forall i \in \hat{n})(x_i \in L)$, jelikož $n \geq m + 1$, je určitě

$$x_{m+1} \in L = [x_1, \ldots, x_m]_\lambda ,$$

což je spor s předpokladem o lineární nezávislosti souboru $(x_1, \ldots, x_n)$. Musí proto $n \leq m$.

(2) Tvrzení lemmatu pro $k = n$ je přímo bod (2).

Q.E.D.

Věta 7: *Nechť je* $\dim V = n \in \mathcal{N}$. *Pak ve* V *existuje* n*-členná báze.*

Důkaz: Protože $\dim V = n$, je $n - 1 \notin N_0(V)$ a ve V existuje LN soubor délky n, označme jej $(x_1, \ldots, x_n)$. Určitě je

$$[x_1, \ldots, x_n]_\lambda \subset V,$$

dokážeme i opačnou inkluzi, a to sporem: Kdyby

$$(\exists x_{n+1} \in V)(x_{n+1} \notin [x_1, \ldots, x_n]_\lambda),$$

pak soubor $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ je LN, neboť neexistuje jeho netriviální lineární kombinace dávající θ. Podle věty 5 by muselo $\dim V \geq n + 1$, což je spor.

Q.E.D.

Věta 8: *Nechť* $n \in \mathcal{N}$ *a nechť ve* V *existuje* n*-členná báze. Potom* $\dim V = n$.

Důkaz: Buď $(y_1, \ldots, y_n)$ báze, tj. LN generující soubor. Z věty 5 plyne, že $\dim V \geq n$. Kdyby $\dim V > n$, pak musí existovat LN soubor délky $n+1$, označme jej $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Platí ovšem

$$(\forall i \in \widehat{n+1})(x_i \in V = [y_1, \ldots, y_n]_\lambda).$$

To jsou však předpoklady věty 6 (Steinitz), podle které délka LN souboru nemůže převýšit počet generátorů, tj. musí $n+1 \leq n$, což je spor.

Q.E.D.

Věta 9: *Nechť* $\{\theta\} \neq V = [y_1, \ldots, y_n]_\lambda$. *Potom* $\dim V = k \leq n$ *a existují navzájem různé indexy* $i_1, \ldots, i_k \in \hat{n}$ *takové, že* $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})$ *je báze* V, *tj. z každého souboru generátorů lze vybrat bázi.*

Důkaz: Z věty 6 plyne, že $\dim V$ nemůže být větší než n. Druhé tvrzení vyplývá např. z důsledku 1.

Q.E.D.

Věta 10: *Nechť* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je LN soubor vektorů z* V, *nechť* $\dim V = n \in \mathcal{N}$. *potom existují vektory* $x_{k+1}, \ldots, x_n$, *že* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je báze* V, *tj. každý LN soubor lze doplnit na bázi.*

Důkaz: Buď $(y_1, \ldots, y_n)$ báze V. Z věty 6 plyne, že $k \leq n$ a že existují navzájem různé indexy $i_1, \ldots, i_k \in \hat{n}$, že

$$V = [y_1, \ldots, y_n]_\lambda = [x_1, \ldots, x_k, (y_i | i \in \hat{n} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\})]_\lambda .$$

Máme tedy n-členný soubor generátorů, obsahující vektory $x_1, \ldots, x_k$. Uvážíme, že musí být LN: Kdyby soubor $(x_1, \ldots, x_k, (y_i | i \in \hat{n} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}))$ byl LZ, můžeme z jeho vektorů vybrat LN soubor délky $\ell < n$ generující V, což je ve sporu s $\dim V = n$.

Q.E.D.

Výpočty dimenze základních vektorových prostorů

Předvedeme výpočty dimenzí vektorových prostorů zavedených v předchozí kapitole, a to tak, že nalezneme bázi.

(1) Tvrdíme

$$\dim T^n = n.$$

Soubor vektorů

$$\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n),$$

kde

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

nazýváme **standardní bází** prostoru T^n. Zřejmě totiž $\mathcal{E}_n$ je LN soubor a každý vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ lze vyjádřit ve tvaru

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, e_i .$$

(2) Podobně nalezneme **standardní bázi** prostoru $T^{m,n}$. Soubor

$$\mathcal{E}_{m,n} = (\mathbf{E}_{1,1}, \mathbf{E}_{1,2}, \ldots, \mathbf{E}_{m,n}),$$

kde

$$\mathbf{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{E}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří **standardní bázi** prostoru $T^{m,n}$.

(3) **Standardní báze** prostoru $\mathcal{P}_n$ je tvořena polynomy:

$$e_1(t) = 1,$$
$$e_2(t) = t,$$
$$\vdots$$
$$e_n(t) = t^{n-1}.$$

(4) $\dim \mathcal{P} = \infty$.

Zdůrazněme, že standardní bázi jsme zavedli pouze v prostorech T^n, $T^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$.

Věta 11: *Nechť V je komplexní vektorový prostor, $\dim V = n \in \mathcal{N}$, nechť $(x_1, \dots, x_n)$ je báze V. Potom soubor $(x_1, \dots, x_n, \mathrm{i}\, x_1, \dots, \mathrm{i}\, x_n)$ délky $2n$ je báze prostoru $V_{\mathcal{R}}$, tj. $\dim V_{\mathcal{R}} = 2n$.*

Důkaz:

(1) Dokážeme, že soubor $(x_1, \dots, x_n, \mathrm{i}\, x_1, \dots, \mathrm{i}\, x_n)$ je LN (v prostoru $V_{\mathcal{R}}$): nechť $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathcal{R}^{2n}$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, \mathrm{i}\, x_j = \theta,$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \mathrm{i}\, \beta_j)\, x_j = \theta.$$

To je ovšem lineární kombinace souboru $(x_1, \dots, x_n)$ v komplexním prostoru V, odkud všechna komplexní čísla $\alpha_j + \mathrm{i}\beta_j = 0$ pro $j \in \hat{n}$ neboli

$$(\forall j \in \hat{n})(\alpha_j = \beta_j = 0),$$

což jsme chtěli dokázat.

(2) Zřejmě $[x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}\, x_1, \ldots, \mathrm{i}\, x_n]_\lambda \subset V_{\mathcal{R}}$ (míněn lineární obal v prostoru $V_{\mathcal{R}}$, tj. s reálnými koeficienty). Dokážeme opačnou inkluzi. Buď proto $x \in V_{\mathcal{R}}$, je tedy také $x \in V$ a existuje $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{C}^n$ takové, že

$$x = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, x_j.$$

Definujme pro všechna $j \in \hat{n}$

$$\alpha_j = \operatorname{Re} \gamma_j,$$
$$\beta_j = \operatorname{Im} \gamma_j,$$

pak lze psát

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, \mathrm{i}\, x_j,$$

tedy platí $x \in [x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}\, x_1, \ldots, \mathrm{i}\, x_n]_\lambda$.

Q.E.D.

Úmluva: Přijměme následující označení:

(1) Vektorový prostor konečné dimenze $n \in \mathcal{N}$ budeme značit V_n.

(2) Zavedeme **Kroneckerovo delta**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 12: *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Potom ke každému $x \in V_n$ existuje právě 1 uspořádaná n-tice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ taková, že*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i.$$

Označíme-li pro každé $i \in \hat{n}$

$$\alpha_i = x_i^{\#}(x),$$

platí:

(1) $(\forall i \in \hat{n})(x_i^{\#} : V_n \mapsto T)$,

(2) $(\forall i \in \hat{n})(\forall x, y \in V_n)(x_i^{\#}(x + y) = x_i^{\#}(x) + x_i^{\#}(y))$,

(3) $(\forall i \in \hat{n})(\forall x \in V_n)(\forall \alpha \in T)(x_i^{\#}(\alpha\, x) = \alpha\, x_i^{\#}(x))$,

(4) $(\forall i, j \in \hat{n})(x_i^{\#}(x_j) = \delta_{ij})$.

Důkaz: Existence $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je zřejmá z $V_n = [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$. Jednoznačnost dokážeme sporem: Kdyby existovala další n-tice $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in T^n$ taková, že $(\exists i \in \hat{n})(\alpha_i \neq \beta_i)$ a

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, x_i,$$

musí

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)\, x_i = \theta.$$

$(x_1, \ldots, x_n)$ je ovšem báze, odkud

$$(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i - \beta_i = 0),$$

což je spor.

(1) Zřejmé.

(2) Buďte $x, y \in V_n$, je tedy

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x)\, x_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(y)\, x_i,$$

odkud

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x)\, x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(y)\, x_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(x_i^{\#}(x) + x_i^{\#}(y)\Big)\, x_i.$$

Současně je $x + y \in V_n$ a musí tedy

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x + y)\, x_i.$$

Z již dokázané jednoznačnosti vyjádření pak

$$(\forall i \in \hat{n})(x_i^{\#}(x + y) = x_i^{\#}(x) + x_i^{\#}(y)).$$

(3) Zcela analogicky jako (2).

(4) Opět jako (2), vyjdeme z vyjádření

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\, x_i.$$

Q.E.D.

Definice 9: *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Zobrazení $x_i^{\#}$ zavedené ve větě 12 nazýváme i-tý* **souřadnicový funkcionál v bázi** $\mathcal{X}$ *(pro $i \in \hat{n}$). Je-li vektor $x \in V_n$, pak číslo $x_i^{\#}(x)$ nazýváme i-tá* **souřadnice vektoru** x **v bázi** $\mathcal{X}$. *Budeme používat následující označení:*

$$(x)_{\mathcal{X}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Leftrightarrow \lceil x \rceil_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i.$$

3. Vektorové operace s množinami

Definice 10: *Nechť V je vektorový prostor na tělesem T.*
(1) Jsou-li $\emptyset \neq A \subset V$, $\emptyset \neq B \subset V$, nazýváme jejich **součtem** *množinu*

$$A + B = \{x \in V | (\exists a \in A)(\exists b \in B)(x = a + b)\} = \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$

(2) **Násobkem** *množiny $\emptyset \neq A \subset V$ množinou $\emptyset \neq S \subset T$ nazýváme množinu*

$$S \cdot A = \{x \in V | (\exists \alpha \in S)(\exists a \in A)(x = \alpha\, a)\} = \{\alpha\, a | \alpha \in S, a \in A\}.$$

(3) Součet $A + B$ nazýváme **direktní**, *právě když každý vektor $x \in A + B$ lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru $x = a + b$, kde $a \in A$, $b \in B$. Direktní součet značíme*

$$A \oplus B.$$

Úmluva: Zjednodušíme zápis:
(1) $\{-1\} \cdot A = -A$,
(2) $\{a\} + A = a + A$,
(3) $A + (-B) = A - B$,
(4) $\{\alpha\} \cdot A = \alpha\, A$.

Poznámka 5: Zamysleme se nad vlastnostmi součtu a násobku množin:
(1) Součet $A + B$ je zjevně komutativní a asociativní.
(2) $A + \theta = A$.
(3) $\theta \in A - A$, ale obecně $A - A \neq \{\theta\}$. Např. pro $x \neq \theta$ je $A = [x]_\lambda = \{\alpha x | \alpha \in T\} \neq \{\theta\}$ a $A - A = \{(\alpha - \beta)x | \alpha, \beta \in T\} = A$.
(4) $\{1\} \cdot A = A$.
(5) $S_1 \cdot (S_2 \cdot A) = (S_1 \cdot S_2) \cdot A$.
(6) $S \cdot (A + B) \subset S \cdot A + S \cdot B$.
(7) $(S_1 + S_2) \cdot A \subset S_1 \cdot A + S_2 \cdot A$.

Lemma 1: *Nechť V je vektorový prostor nad T.*
(1) Je-li $\emptyset \neq S_1 \subset S \subset T$ a $\emptyset \neq A_1 \subset A \subset V$, pak platí

$$S_1 \cdot A_1 \subset S \cdot A.$$

(2) Je-li $\emptyset \neq A_1 \subset A \subset V$ a $\emptyset \neq B_1 \subset B \subset V$, pak platí

$$A_1 + B_1 \subset A + B.$$

Důkaz:
(1) Když $x \in S_1 \cdot A_1$, potom existuje $a \in A_1 \subset A$, $\alpha \in S_1 \subset S$ takové, že $x = \alpha\, a$ neboli $x \in S \cdot A$.
(2) Zcela analogicky jako (1).

Q.E.D.

4. Podprostor

Definice 11: *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $P \subset V$. Říkáme, že P je* **podprostor** *prostoru V, právě když platí (axiómy podprostoru):*
(1) $P \neq \emptyset$.
(2) $(\forall x \in P)(\forall y \in P)(x + y \in P)$.
(3) $(\forall \alpha \in T)(\forall x \in P)(\alpha\ x \in P)$.
Značíme

$$P \subset\subset V.$$

Poznámka 6: Axiómy podprostoru lze alternativně zapsat pomocí vektorových operací s množinami:
(2) $P + P \subset P$.
(3) $T \cdot P \subset P$.

Věta 13: *Nechť V je vektorový prostor nad T, $P \subset\subset V$. Potom platí:*
(1) $\theta \in P$.
(2) $\{\theta\} \subset\subset V$, $V \subset\subset V$.
(3) P se zúžením operace sčítání vektorů $+$ na $P \times P$ a operace násobení vektorů číslem $\cdot$ na $T \times P$ je vektorový prostor.
(4) Je-li $\emptyset \neq A \subset V$ se zúžením $+$ na $A \times A$ a $\cdot$ na $T \times A$ vektorovým prostorem, potom platí $A \subset\subset V$.
(5) $P_1 \subset\subset P \Rightarrow P_1 \subset\subset V$.

Důkaz: Zřejmý z definice pojmu podprostor.

Q.E.D.

Příklady: V rovině souřadné je podprostor přímka procházející počátkem a sám počátek. Přímka, která neprochází počátkem, nemůže být podprostor.

Definice 12: *Podprostory $\{\theta\}$ a V vektorového prostoru V nazýváme* **triviální podprostory**. *Podprostor $P \subset\subset V$, $P \neq V$, nazýváme* **vlastním podprostorem** *V.*

Věta 14: *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, $\emptyset \neq P \subset V$. Následující 3 tvrzení jsou ekvivalentní:*
(1) $P \subset\subset V$.
(2) $(\forall \alpha \in T)(\forall x, y \in P)(\alpha\ x + y \in P)$, *tj.* $T \cdot P + P \subset P$.
(3) $(\forall n \in \mathcal{N})(\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n)(\forall x_1, \ldots, x_n \in P)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i \in P\right)$.

Důkaz: Dokážeme řetězec implikací: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

- (1)$\Rightarrow$(2): Víme $P + P \subset P$ a $T \cdot P \subset P$. Z lemmatu 1 v kapitole 3 je tedy

$$T \cdot P + P \subset P + P \subset P,$$

což je zjevně ekvivalentní s

$$(\forall \alpha \in T)(\forall x, y \in P)(\alpha\ x + y \in P).$$

- (2)$\Rightarrow$(3): Dokážeme matematickou indukcí. Buď $n = 1$, tj. chceme dokázat

$$(\forall \alpha_1 \in T)(\forall x_1 \in P)(\alpha_1\ x_1 \in P).$$

Nejdříve uvážíme, že podle (2) je $\theta \in P$, neboť $(\forall a \in P)((-1)a + a = (-a) + a = \theta \in P)$. Potom opět podle (2) je

$$\alpha_1\ x_1 + \theta \in P.$$

Buď nyní $n \in \mathcal{N}$ a nechť $(\forall n \in \mathcal{N})(\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n)(\forall x_1, \ldots, x_n \in P)$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i \in P.$$

Vezměme libovolné $\alpha_{n+1} \in T$ a $x_{n+1} \in P$, pak $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in T^{n+1}$. Můžeme psát

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i + \alpha_{n+1}\ x_{n+1},$$

kde suma na pravé straně leží podle indukčního předpokladu v P a podle (2) je tedy

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ x_i \in P.$$

- (3)⇒(1): Položme v (3) $n = 2$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, potom

$$(\forall x_1, x_2 \in P)(x_1 + x_2 \in P),$$

což je druhý axióm podprostoru. Podobně pro $n = 1$ platí podle (3)

$$(\forall \alpha_1 \in T)(\forall x_1 \in P)(\alpha_1\ x_1 \in P),$$

což je třetí axióm podprostoru.

Q.E.D.

Poznámka 7: Důsledkem vlastností podprostoru je následující tvrzení. Buď $P \subset\subset V$, pak platí:

(1) $P + P = P$.
(2) $T \cdot P = P$.
(3) $T \cdot P + P = P$.
(4) $(\forall \alpha \in T)(\alpha \neq 0)(\alpha \cdot P = P)$.

Věta 15: *Nechť $P \subset\subset V$, $Q \subset\subset V$, $\{P_i | i \in J\}$ je neprázdný systém ($J \neq \emptyset$) podprostorů V. Potom platí:*

(1) $P + Q \subset\subset V$.
(2) $P + Q$ je direktní právě tehdy, je-li $P \cap Q = \{\theta\}$.
(3) $\bigcap_{i \in J} P_i \subset\subset V$.
(4) $\dim P \leq \dim V$; je-li P vlastní podprostor V a $\dim V < \infty$, potom $\dim P < \dim V$.

Důkaz:

(1) Zřejmě $P + Q \neq \emptyset$. Platí (poznámka 5)

$$T \cdot (P+Q) + (P+Q) \subset T \cdot P + T \cdot Q + (P+Q) = (T \cdot P + P) + (T \cdot Q + Q) \subset P + Q,$$

odkud podle věty 14 je $P+Q$ podprostor.

(2) $\Rightarrow$: Buď $P+Q$ direktní, kdyby $P\cap Q \neq \{\theta\}$, existuje $\theta \neq a \in P\cap Q$. Je tedy $a \in P$ a $-a \in Q$ a lze tak nulový vektor $\theta \in P+Q$ rozložit do součtu 2 vektorů z P a Q dvěma způsoby:

$$\theta = \theta + \theta = a + (-a),$$

což je spor s direktností součtu $P \oplus Q$.

$\Leftarrow$: Nechť $P\cap Q = \{\theta\}$ a současně $P+Q$ není direktní. Existuje tedy $x \in P+Q$ takové, že

$$x = a_1 + b_1 = a_2 + b_2,$$

kde $(a_1, a_2 \in P) \wedge (a_1 \neq a_2)$ a $(b_1, b_2 \in Q) \wedge (b_1 \neq b_2)$. Potom ovšem

$$\theta \neq a_1 - a_2 = b_2 - b_1,$$

kde $a_1 - a_2 \in P$ a $b_2 - b_1 \in Q$ a v průniku $P\cap Q$ se tak nachází i nenulový vektor $a_1 - a_2$, což je spor.

(3) Označme

$$A = \bigcap_{i\in J} P_i,$$

zřejmě $A \neq \emptyset$, neboť $(\forall i \in J)(\theta \in P_i)$. Pro každé $i \in J$ platí (protože $A \subset P_i$ a P_i je podprostor):

$$T\cdot A + A \subset T\cdot P_i + P_i \subset P_i.$$

To ale znamená, že

$$T\cdot A + A \subset \bigcap_{i\in J} P_i = A,$$

tedy A je podle věty 14 podprostor.

(4) Buď $P \subset\subset V$. Je-li $\dim V = \infty$, pak tvrzení $\dim P \leq \dim V$ zřejmě platí. Je-li $\dim V = n < \infty$, pak uvážíme, že $\emptyset \neq N_0(V) \subset N_0(P)$: Nechť $j \in N_0(V)$, tj. každý $j+1$-členný soubor vektorů z V je LZ. Protože $P \subset V$, je každý $j+1$-členný soubor vektorů z P souborem vektorů z V a je tedy LZ, odkud $j \in N_0(P)$. Potom je $\min N_0(P) \leq \min N_0(V)$ neboli $\dim P \leq \dim V$.

Buď P vlastní podprostor V, $\dim V = n < \infty$, víme už, že $\dim P = k \leq n$. Je-li $\dim P = 0$, tj. $P = \{\theta\}$, musí $V \neq \{\theta\}$ a tedy $n = \dim V > 0$. Je-li $\dim P = k > 0$, existuje báze P, označme ji $(x_1, \ldots, x_k)$. Protože $P \neq V$, existuje $x_{k+1} \in V$ takový, že $x_{k+1} \notin P$ a tedy soubor $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ je LN, odkud $\dim V \geq k+1$. V obou případech tak platí $\dim P < \dim V$.

Q.E.D.

Věta 16 (1. o dimenzi): *Buďte $P, Q \subset\subset V$, $\dim P < \infty$, $\dim Q < \infty$. Potom platí:*

$$\dim(P+Q) + \dim(P\cap Q) = \dim P + \dim Q,$$

speciálně pro direktní součet:

$$\dim(P\oplus Q) = \dim P + \dim Q.$$

Důkaz: Mohou nastat 2 případy:

(1) $P \dot{\subset\subset} Q \vee Q \subset\subset P$:
Nechť třeba $P \subset\subset Q$, potom $P + Q = Q$ a $P \cap Q = P$. Tvrzení věty tedy platí.

(2) Případ (1) nenastane:
Máme pak 2 možnosti:

(a) $\dim(P \cap Q) = s \in \mathcal{N}$:
Nechť $\dim P = m$ a $\dim Q = n$. Podle věty 15 je $P \cap Q \subset\subset V$. Označme $(x_1, \ldots, x_s)$ bázi $P \cap Q$. Potom existují báze P a Q obsahující vektory $x_1, \ldots, x_s$, označme bázi P

$$(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_m)$$

a bázi Q

$$(x_1, \ldots, x_s, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-s}).$$

Dokážeme nyní, že soubor

$$\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_{m+n-s})$$

je báze $P + Q$. Tím je ovšem tvrzení věty dokázáno, neboť potom

$$\dim(P + Q) = m + n - s = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q).$$

Ukažme tedy předně, že $\mathcal{X}$ generuje $P + Q$, to je ale zřejmé. Dále ověřme, že $\mathcal{X}$ je LN: Buď

$$\theta = \sum_{i=1}^{m+n-s} \alpha_i \, x_i,$$

odkud plyne

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x_i = - \sum_{i=m+1}^{m+n-s} \alpha_i \, x_i.$$

Levá strana této rovnosti je vektor z P a pravá z Q neboli jde o vektor z $P \cap Q$. Musí tedy existovat $(\beta_1, \ldots, \beta_s) \in T^s$ tak, že

$$- \sum_{i=m+1}^{m+n-s} \alpha_i \, x_i = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \, x_i,$$

odkud ovšem

$$\theta = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \, x_i + \sum_{i=m+1}^{m+n-s} \alpha_i \, x_i,$$

což je lineární kombinace báze Q dávající nulový vektor. Musí proto

$$(\forall i \in \{m+1, \ldots, m+n-s\})(\alpha_i = 0),$$

odkud také po dosazení

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x_i,$$

což je ovšem lineární kombinace báze P. Proto platí

$$(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0).$$

Celkem jsme dokázali, že každá nulová lineární kombinace souboru $\mathcal{X}$ je triviální, tudíž $\mathcal{X}$ je LN.

(b) $\dim(P \cap Q) = 0$, tj. $P \cap Q = \{\theta\}$, což je ekvivalentní s direktností součtu $P \oplus Q$. Buď $(x_1, \ldots, x_m)$ báze P a $(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})$ báze Q. O souboru $(x_1, \ldots, x_{m+n})$ pak ukážeme, že je bází $P + Q$, a to stejně jako v (a) pro $s = 0$. Potom platí:

$$\dim(P \oplus Q) = m + n = \dim P + \dim Q.$$

Věta je tak zcela dokázána.

Q.E.D.

Věta 17: *Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z V. Potom platí:*
(1) $P = [x_1, \ldots, x_n]_\lambda \subset\subset V$.
(2) $\dim P \leq n$, $\dim P = n \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ *LN.*
(3) Označme $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *pak*

$$P = \bigcap_{M \subset Q \subset\subset V} Q.$$

Důkaz:
(1) Zřejmé.
(2) Zřejmé.
(3) Buď $x \in P$, pak existuje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i.$$

Pak ale zřejmě x leží v každém $Q \subset\subset V$ takovém, že $M \subset Q$, odkud

$$x \in \bigcap_{M \subset Q \subset\subset V} Q$$

neboli

$$P \subset \bigcap_{M \subset Q \subset\subset V} Q.$$

Naopak P je sám podprostor V takový, že $M \subset P$, odkud plyne obrácená inkluze

$$\bigcap_{M \subset Q \subset\subset V} Q \subset P.$$

Q.E.D.

5. Lineární zobrazení

Definice 13: *Nechť P, Q jsou 2 vektorové prostory nad stejným číselným tělesem T, nechť zobrazení $A : P \mapsto Q$. Říkáme, že A je* **lineární** *(homomorfní), právě když platí:*
(1) $(\forall x \in P)(\forall y \in P)(A(x+y) = Ax + Ay)$,
(2) $(\forall \alpha \in T)(\forall x \in P)(A(\alpha\, x) = \alpha\, Ax)$.
Množinu všech lineárních zobrazení P do Q značíme $\mathcal{L}(P,Q)$. Na $\mathcal{L}(P,Q)$ definujeme operace
(1) **součet** *zobrazení $A, B \in \mathcal{L}(P,Q)$*

$$(\forall x \in P)((A+B)x = Ax + Bx),$$

(2) **násobení** *zobrazení $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ číslem $\alpha \in T$:*

$$(\forall x \in P)((\alpha\, A)x = \alpha\, Ax).$$

Věta 18: *Množina $\mathcal{L}(P,Q)$ s operacemi zavedenými v předcházející definici je vektorovým prostorem nad tělesem T.*

Důkaz:

(1) Množina $\mathcal{L}(P,Q)$ je neprázdná, neboť existuje alespoň 1 lineární zobrazení P do Q, a to tzv. **nulové zobrazení** Θ:

$$(\forall x \in P)(\Theta x = \theta_Q),$$

kde θ_Q označuje nulový vektor v prostoru Q.

(2) Vyšetříme uzavřenost množiny $\mathcal{L}(P,Q)$ vzhledem ke sčítání zobrazení a násobení zobrazení číslem. Buďte $A, B \in \mathcal{L}(P,Q)$, přesvědčíme se, zda $A + B \in \mathcal{L}(P,Q)$. Platí podle definice operací a s využitím linearity A, B

$$(A+B)(x+y) = A(x+y)+B(x+y) = Ax+Ay+Bx+By = (A+B)x+(A+B)y,$$

$$(A+B)(\alpha\, x) = A(\alpha\, x) + B(\alpha\, x) = \alpha\, Ax + \alpha\, Bx = \alpha\, (A+B)x,$$

což bylo dokázat. Zcela obdobně

$$(\alpha\, A)(x+y) = \alpha\, A(x+y) = \alpha\, Ax + \alpha\, Ay = (\alpha\, A)x + (\alpha\, A)y,$$

$$(\alpha\, A)(\beta\, x) = \alpha\, A(\beta\, x) = \alpha\, \beta\, Ax = \beta\, \alpha\, Ax = \beta\, (\alpha A)x.$$

(3) Dále musíme ověřit 8 axiómů vektorového prostoru z definice 1. Např. axióm S1 (komutativita sčítání vektorů): Buď $x \in P$ libovolný, pak Ax, Bx jsou vektory z Q. S použitím definice sčítání zobrazení a axiómu S1 pro prostor Q dostaneme

$$(A+B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B+A)x,$$

což jsme chtěli dokázat. Splnění ostatních axiómů S2,N1,N2,D1,D2 se ověří analogicky. Axióm S3 o existenci nulového vektoru je splněn díky nulovému zobrazení Θ. Opačným vektorem k zobrazení $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ je zřejmě zobrazení $(-1)\, A$.

Q.E.D.

Poznámka 8: Bezprostředním důsledkem definice 13 je tvrzení: Buď $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, pak

$$A\theta_P = \theta_Q.$$

Důkaz plyne z $A\theta_P = A(0\ x) = 0\ Ax = \theta_Q$, kde $x \in P$ libovolný.

Definice 14: *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.*

(1) Lineární zobrazení prostoru V do V nazýváme **lineární operátor** *na V. Množinu všech lineárních operátorů na V značíme krátce $\mathcal{L}(V)$.*

(2) Lineární zobrazení prostoru V do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** *na V. Množinu všech lineárních funkcionálů definovaných na V značíme krátce $V^{\#}$ a nazýváme* **duální prostor** *k prostoru V.*

Definice 15:

(1) Je-li $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a prosté, říkáme, že A je **monomorfní**.

(2) Je-li $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a zobrazení P na Q, říkáme, že A je **epimorfní**.

(3) Je-li $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, prosté a zobrazení P na Q, říkáme, že A je **izomorfní**.

(4) Je-li $A \in \mathcal{L}(P)$, prosté a zobrazení P na P, říkáme, že A je **regulární operátor**.

Věta 19: *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T, $A : P \mapsto Q$. Následující 3 tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) $A \in \mathcal{L}(P,Q)$.

(2) $(\forall \alpha \in T)(\forall x \in P)(\forall y \in P)(A(\alpha\ x + y) = \alpha\ Ax + Ay)$.

(3) $(\forall n \in \mathcal{N})(\forall(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in T^n)(\forall x_1,\ldots,x_n \in P)\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ Ax_i\right)$.

Důkaz:

- (1)⇒(2): Z linearity A

$$A(\alpha\ x + y) = \alpha\ Ax + Ay.$$

- (2)⇒(3): Dokážeme matematickou indukcí. Předně ukažme, že $A\theta_P = \theta_Q$. Buď $x \in P$, pak také $-x \in P$ a podle (2) platí:

$$A\theta_P = A(-x + x) = -Ax + Ax = \theta_Q.$$

Pro $n = 1$ vezměme $\alpha_1 \in T$ a $x_1 \in P$, podle (2) pak

$$A(\alpha_1\ x_1) = A(\alpha_1\ x_1 + \theta_P) = \alpha_1\ Ax_1 + A\theta_P = \alpha_1\ Ax_1 + \theta_Q = \alpha_1\ Ax_1.$$

Buď $n \in \mathcal{N}$ a nechť $(\forall(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in T^n)$ $(\forall x_1,\ldots,x_n \in P)$ platí

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ Ax_i.$$

Vezměme libovolně $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}) \in T^{n+1}$ a $x_1,\ldots,x_{n+1} \in P$ a označme

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i.$$

Potom podle (2)

$$A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ x_i\right) = A(y + \alpha_{n+1}\ x_{n+1}) = Ay + \alpha_{n+1}\ Ax_{n+1}$$

a za Ay dosadíme z indukčního předpokladu

$$Ay = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ Ax_i,$$

odkud plyne

$$A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\ Ax_i.$$

- (3)⇒(1): Položme v (3) $n = 2$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, odkud

$$(\forall x_1, x_2 \in P)(A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2).$$

Podobně pro $n = 1$ z (3) plyne

$$(\forall \alpha_1 \in T)(\forall x_1 \in P)(A(\alpha_1\ x_1) = \alpha_1\ Ax_1).$$

Q.E.D.

Věta 20: *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Potom soubor*

$$\mathcal{X}^{\#} = (x_1^{\#}, \ldots, x_n^{\#})$$

je bází duálního prostoru $V_n^{\#}$, tj. $\dim V_n^{\#} = n$. Dále pro každé $\varphi \in V_n^{\#}$ platí

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)).$$

Důkaz:

(1) Ukážeme, že soubor $\mathcal{X}^{\#}$ je LN. Vezměme tedy lineární kombinaci souboru $\mathcal{X}^{\#}$ dávající nulový funkcionál

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ {x_i}^{\#} = \Theta,$$

tedy

$$(\forall x \in V_n)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i^{\#}(x) = 0\right).$$

Speciálně pro bázové vektory

$$(\forall j \in \hat{n})\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i^{\#}(x_j) = 0\right),$$

protože $x_i^{\#}(x_j) = \delta_{ij}$, plyne odtud

$$(\forall j \in \hat{n})(\alpha_j = 0).$$

(2) Dokážeme, že $\mathcal{X}^{\#}$ generuje $V_n^{\#}$. Inkluze

$$\left[x_1^{\#}, \ldots, x_n^{\#}\right]_\lambda \subset V_n^{\#}$$

je triviální. Opačnou inkluzi dokážeme konstruktivně, tj. udáme způsob, jak libovolný lineární funkcionál $\varphi \in V_n^{\#}$ vyjádřit ve tvaru lineární kombinace souřadnicových funkcionálů: Buď $x \in V_n$ libovolné, pak

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x)\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x) \cdot \varphi(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot x_i^{\#}\right)(x).$$

Musí proto platit rovnost zobrazení

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\, x_i^{\#},$$

odkud

$$\varphi \in \left[x_1^{\#}, \ldots, x_n^{\#}\right]_\lambda$$

a navíc

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)),$$

což je druhé tvrzení věty.

Q.E.D.

Definice 16: *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Bázi $\mathcal{X}^{\#} = (x_1^{\#}, \ldots, x_n^{\#})$ nazýváme* **bází duální** *k bázi $\mathcal{X}$.*

Věta 21: *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T, $A : P \mapsto Q$ je izomorfní. Pak existuje inverzní zobrazení $A^{-1} : Q \mapsto P$, které je izomorfní.*

Důkaz: Zobrazení $A^{-1} : Q \mapsto P$ určitě existuje, je i prosté a na. Zbývá ověřit, že A^{-1} je lineární. Zvolme libovolné $\alpha \in T$ a $u, v \in Q$. Existují tedy $x, y \in P$ takové, že $u = Ax$ a $v = Ay$, tj. $x = A^{-1}u$ a $y = A^{-1}v$. Položme $w = \alpha\, u + v \in Q$ a $z = A^{-1}w$, tj.

$$Az = \alpha\, u + v = \alpha\, Ax + Ay = A(\alpha\, x + y).$$

Protože A je prosté, je $z = \alpha\, x + y$ neboli

$$A^{-1}(\alpha\, u + v) = \alpha\, A^{-1}u + A^{-1}v,$$

což je podle věty 19 ekvivalentní linearitě A^{-1}.

Q.E.D.

Věta 22: *Buďte P, Q, V vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathcal{L}(Q, V)$ a $B \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pro složené zobrazení AB, definované*

$$(\forall x \in P)((AB)x = A(Bx)),$$

platí $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.

Důkaz: Zřejmě $AB : P \mapsto V$, zbývá ověřit linearitu. Vezměme libovolné $\alpha \in T$ a $x, y \in P$, potom

$$(AB)(\alpha x + y) = A(B(\alpha x + y)) = A(\alpha Bx + By) = \alpha A(Bx) + A(By) = \alpha(AB)x + (AB)y,$$

odkud podle věty 19 je AB lineární.

Q.E.D.

Věta 23: *Homomorfní obraz resp. vzor podprostoru je podprostor.*

Důkaz: Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

(1) Buď $\tilde{P} \subset\subset P$. Připomeňme, že $A(\tilde{P}) = \{Ax | x \in \tilde{P}\}$. Zřejmě je $A(\tilde{P}) \neq \emptyset$, neboť $\tilde{P} \neq \emptyset$, a $A(\tilde{P}) \subset Q$. Podle věty 14 stačí ukázat, že

$$(\forall \alpha \in T)(\forall u, v \in A(\tilde{P}))(\alpha\ u + v \in A(\tilde{P})).$$

Vezměme $\alpha \in T$ a $u, v \in A(\tilde{P})$, musí tedy existovat $x, y \in \tilde{P}$ tak, že $u = Ax$ a $v = Ay$. Potom

$$\alpha\ u + v = \alpha\ Ax + Ay = A(\alpha\ x + y).$$

Je ovšem $\alpha\ x + y \in \tilde{P}$, odkud $\alpha\ u + v \in A(\tilde{P})$.

(2) Buď $\tilde{Q} \subset\subset Q$. Připomeňme, že $A^{-1}(\tilde{Q}) = \{x \in P | Ax \in \tilde{Q}\}$. Zřejmě je $A^{-1}(\tilde{Q}) \neq \emptyset$, neboť $\theta \in A^{-1}(\tilde{Q})$. Zvolme $\alpha \in T$ a $x, y \in A^{-1}(\tilde{Q})$, tedy $Ax \in \tilde{Q}$ a $Ay \in \tilde{Q}$. Protože

$$A(\alpha\ x + y) = \alpha\ Ax + Ay \in \tilde{Q},$$

je $\alpha\ x + y \in A^{-1}(\tilde{Q})$.

Q.E.D.

Úmluva:

$$A^{-1}(\{x\}) = A^{-1}(x).$$

Definice 17: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. *Číslo* $\dim A(P)$ *nazýváme* **hodností zobrazení** A *a značíme* $\mathrm{h}(A)$. *Množinu* $A^{-1}(\theta_Q)$ *nazýváme* **jádro zobrazení** A *a značíme* $\ker A$, *číslo* $\dim \ker A$ *nazýváme* **defekt zobrazení** A *a značíme* $\mathrm{d}(A)$.

Věta 24: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. *Potom* A *je prosté tehdy a jen tehdy, jestliže v jeho jádru leží pouze nulový vektor.*

Důkaz:

(1) Buď $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ prosté. Vždy $\theta_P \in \ker A$. Dokážeme opačnou inkluzi: Nechť $x \in \ker A$, tj. $Ax = \theta_Q = A\theta_P$; protože A je prosté, platí $x = \theta_P$.

(2) Buď $\ker A = \{\theta_P\}$. Vezměme $x_1, x_2 \in P$ takové, že $Ax_1 = Ax_2$, tedy $A(x_1 - x_2) = \theta_Q$. Protože v jádru A leží jen nulový vektor, musí $x_1 - x_2 = \theta_P$. Dokázali jsme tak

$$Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

tj. A je prosté zobrazení.

Q.E.D.

Definice 18: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

(1) Je-li $(x_1, \ldots, x_n)$ soubor vektorů z P, pak soubor $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ nazýváme **obrazem souboru** *$(x_1, \ldots, x_n)$ při zobrazení A.*
(2) Je-li $(y_1, \ldots, y_n)$ soubor vektorů z $A(P)$, pak soubor $(z_1, \ldots, z_n)$ takový, že platí

$$(\forall i \in \hat{n})(Az_i = y_i),$$

nazýváme **vzorem souboru** *$(y_1, \ldots, y_n)$ při zobrazení A.*

Poznámka 9: Obraz souboru je určen jednoznačně, ale vzor nemusí být jednoznačný.

Věta 25:
(1) Homomorfní obraz resp. monomorfní vzor LZ souboru je LZ soubor.
(2) Homomorfní vzor resp. monomorfní obraz LN souboru je LN soubor.

Důkaz: Buďte P, Q vektorové prostory nad T, $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.
(1) Buď $(x_1, \ldots, x_n)$ LZ soubor vektorů z P, existuje tedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ tak, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = \theta_P\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0\right).$$

Platí proto

$$\theta_Q = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, Ax_i,$$

tedy soubor $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ je LZ.
(2) Buď $(y_1, \ldots, y_n)$ LZ soubor vektorů z $A(P)$, buď A prosté. Označme $(x_1, \ldots, x_n)$ vzor souboru $(y_1, \ldots, y_n)$ při zobrazení A, tj. $(\forall i \in \hat{n})\ (Ax_i = y_i)$. Protože soubor $(y_1, \ldots, y_n)$ je LZ, existuje jeho netriviální lineární kombinace dávající nulový vektor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y_i = \theta_Q\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > 0\right)$$

neboli

$$\theta_Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, Ax_i = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i\right),$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i \in \ker A = \{\theta_P\},$$

neboť A je prosté. Soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ je tedy LZ.
(3) Kdyby existoval LN soubor, jehož homomorfní vzor je LZ, dostáváme spor s (1).
(4) Kdyby existoval LN soubor, jehož monomorfní obraz je LZ, dostáváme se do sporu s (2).

Q.E.D.

Věta 26: *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T. Nechť $(x_1, \ldots, x_n)$ je báze P, nechť $(y_1, \ldots, y_n)$ je soubor vektorů z Q. Potom existuje právě 1 lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že*

$$(\forall i \in \hat{n})(Ax_i = y_i).$$

Důkaz: Tvrdíme, že předpis pro zobrazení A má tvar

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x) \cdot y_i$$

pro všechna $x \in P$.

(1) Ověříme linearitu A: Buďte $\alpha \in T$ a $x, y \in P$ libovolné, pak platí

$$A(\alpha\ x + y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(\alpha\ x + y)\ y_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\ x_i^{\#}(x) + x_i^{\#}(y))\ y_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x)\ y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(y)\ y_i = \alpha\ Ax + Ay.$$

(2) Pro bázové vektory $(x_1, \ldots, x_n)$ platí

$$Ax_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(x_j)\ y_i = y_j.$$

(3) Jednoznačnost $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ dokážeme sporem: Nechť existuje $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že $(\forall i \in \hat{n})(Bx_i = y_i)$ a přitom $B \neq A$, tj.

$$(\exists a \in P)(Aa \neq Ba).$$

Potom ale z linearity B vyplývá:

$$Ba = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(a)\ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(a)\ Bx_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\#}(a)\ y_i = Aa,$$

což je spor.

Q.E.D.

Věta 27: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ je soubor vektorů z P. Potom platí:*

$$A([x_1, \ldots, x_n]_\lambda) = [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda.$$

Důkaz: Vyjdeme z ekvivalence

$$y \in A([x_1, \ldots, x_n]_\lambda) \Leftrightarrow (\exists x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda)(y = Ax),$$

přitom

$$x \in [x_1, \ldots, x_n]_\lambda \Leftrightarrow (\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n)\left(x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i\right).$$

Z linearity A plyne

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ Ax_i,$$

odkud celkem

$$y \in A([x_1, \ldots, x_n]_\lambda) \Leftrightarrow y \in [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda .$$

Q.E.D.

Věta 28: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $b \in A(P)$. Nechť $a \in A^{-1}(b)$, tj. $Aa = b$. Potom platí*

$$A^{-1}(b) = a + \ker A.$$

Důkaz:

(1) Buď $x \in A^{-1}(b)$, tj. $Ax = b$. Tedy

$$A(x - a) = \theta$$

neboli

$$x - a \in \ker A,$$

odkud

$$x \in a + \ker A.$$

(2) Buď $x \in a + \ker A$, tj. $(\exists z \in \ker A)(x = a + z)$ a platí

$$Ax = A(a + z) = Aa = b,$$

odkud

$$x \in A^{-1}(b).$$

Q.E.D.

Definice 19: *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T. Existuje-li izomorfní zobrazení $P \mapsto Q$, říkáme, že P a Q jsou* **izomorfní** *a značíme $P \cong Q$.*

Věta 29: *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T, nechť alespoň jeden z nich má konečnou dimenzi. Potom $P \cong Q$ tehdy a jen tehdy, když $\dim Q = \dim P$.*

Důkaz:

(1) $\Rightarrow$: Buď $\dim P < \infty$.

(a) $\dim P = 0$, což je ekvivalentní s $P = \{\theta_P\}$. Buď A izomorfismus $P \mapsto Q$, tj. A lineární, odkud plyne $Q = A(P) = \{\theta_Q\}$ neboli $\dim Q = 0$.

(b) $\dim P = n \in \mathcal{N}$, označme $(x_1, \ldots, x_n)$ bázi P. Buď $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ izomorfní, pak podle věty 27

$$Q = A(P) = A([x_1, \ldots, x_n]_\lambda) = [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda ,$$

tj. soubor $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ generuje Q. Protože monomorfní obraz LN souboru je LN soubor (věta 25), je $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ LN, tedy je báze Q, odkud $\dim Q = n$.

(2) $\Leftarrow$:

(a) Nechť $\dim P = \dim Q = 0$, odkud $P = \{\theta_P\}$ a $Q = \{\theta_Q\}$. Zřejmě zobrazení $A : P \mapsto Q$, definované

$$A\theta_P = \theta_Q,$$

je hledaným izomorfismem.

(b) Nechť $\dim P = \dim Q = n \in \mathcal{N}$, označme $(x_1, \ldots, x_n)$ bázi P a $(y_1, \ldots, y_n)$ bázi Q. Z věty 26 víme, že existuje právě 1 zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(Ax_i = y_i).$$

Dokážeme, že toto A je izomorfní: Předně je

$$A(P) = A([x_1, \ldots, x_n]_\lambda) = [y_1, \ldots, y_n]_\lambda = Q,$$

tj., A je zobrazení P na Q. Dále buď $x \in \ker A$, tj. $Ax = \theta_Q$. Existuje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i,$$

odkud

$$\theta_Q = Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, Ax_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i.$$

Soubor $(y_1, \ldots, y_n)$ je ale báze Q, tj. musí

$$(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)$$

neboli $x = \theta_P$. Dokázali jsme tak

$$\ker A = \{\theta_P\}$$

a podle věty 24 je A prosté.

Q.E.D.

Důsledek 2: *Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T, $P \cong Q$. Potom* $\dim P = \dim Q$.

Důkaz: Kdyby $\dim P \neq \dim Q$, alespoň 1 z nich je konečná. Podle věty 29 pak ale $\dim P = \dim Q$, což je spor.

Q.E.D.

Důsledek 3: *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathcal{N}$ nad tělesem T. Potom*

$$V_n \cong T^n.$$

Důkaz: Je $dim\ V_n = dim\ T^n = n$, tedy podle věty 29 je $V_n \cong T^n$.

Q.E.D.

Příklad: *Sestrojme jedno důležité izomorfní zobrazení prostoru V_n na T^n. Buď $\mathcal{X} = (x_1 \ldots, x_n)$ báze V_n. Definujme zobrazení $A : V_n \mapsto T^n$ vztahem*

$$(\forall x \in V_n)(Ax = (x)_{\mathcal{X}}).$$

Podle věty 12 a věty 24 je zobrazení A lineární a prosté. To, že A zobrazuje V_n na T^n dokážeme konstruktivně: Buď libovolně $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$, pak definujeme $x \in V_n$ vztahem

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i,$$

zřejmě platí $Ax = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Je tedy A izomorfismus.

Poznámka 10: Zobrazení $A \in \mathcal{L}(V_n, T^n)$, zavedené v předchozím příkladě, nazýváme **souřadnicový izomorfismus** v bázi $\mathcal{X}$.

Věta 30: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$. Potom A je izomorfní tehdy a jen tehdy, je-li monomorfní nebo epimorfní.*

Důkaz:

(1) $\Rightarrow$: Tato implikace je triviálním důsledkem definice 15.

(2) $\Leftarrow$:

(a) Buď A monomorfní, dokážeme, že je epimorfní: Označme $(x_1, \ldots, x_n)$ bázi P_n, potom

$$A(P_n) = A([x_1, \ldots, x_n]_\lambda = [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda \subset\subset Q_n.$$

Monomorfní obraz LN souboru je LN, proto $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ je LN a tedy

$$\dim [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda = n$$

neboli tento podprostor Q_n nemůže být vlastní a platí tedy

$$A(P_n) = [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda = Q_n.$$

(b) Buď A epimorfní; dokážeme, že $\ker A = \{\theta_P\}$. Označme $(x_1, \ldots, x_n)$ bázi P_n. Nechť tedy $Ax = \theta_Q$, existuje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^n$ tak, že

$$x = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i \, x_i,$$

odkud

$$\theta_Q = Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, Ax_i.$$

A je ovšem zobrazení P_n na Q_n, tj.

$$Q_n = A(P_n) = [Ax_1, \ldots, Ax_n]_\lambda$$

neboli $(Ax_1, \ldots, Ax_n)$ je LN. Potom platí

$$(\forall i \in \hat{n})(\alpha_i = 0)$$

a tedy $x = \theta_P$.

Q.E.D.

Důsledek 4: *Nechť A je lineární operátor: $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom A je regulární tehdy a jen tehdy, je-li monomorfní nebo epimorfní.*

Věta 31: *Nechť P, Q, $\tilde{Q}$ jsou podprostory V, nechť $P \oplus Q = P \oplus \tilde{Q}$. Potom $Q \cong \tilde{Q}$.*

Důkaz: Zkonstruujeme izomorfismus $A : Q \mapsto \tilde{Q}$. Zřejmě

$$Q \subset\subset P \oplus Q = P \oplus \tilde{Q},$$

odkud existuje jednoznačný rozklad

$$(\forall x \in Q)(\exists_1 p \in P)(\exists_1 q \in \tilde{Q})(x = p + q).$$

Definujeme pak

$$(\forall x \in Q)(x = p + q)(Ax = q \in \tilde{Q}).$$

(1) A je lineární:
Buďte $\alpha \in T$, $x, y \in Q$ a nechť $x = p + q$, $y = p' + q'$, kde $p, p' \in P$ a $q, q' \in \tilde{Q}$. Potom

$$\alpha\, x + y = (\alpha\, p + p') + (\alpha\, q + q'),$$

kde první sčítanec na pravé straně je vektor z P a druhý z $\tilde{Q}$. Podle definice A je tedy

$$A(\alpha\, x + y) = \alpha\, q + q' = \alpha\, Ax + Ay.$$

(2) A je prosté:
Buď $x \in \ker A \subset\subset Q$, tj. $Ax = \theta_{\tilde{Q}}$ neboli $x \in P$. Je tedy $x \in P \cap Q = \{\theta\}$ a proto $x = \theta$.

(3) A zobrazuje Q na $\tilde{Q}$:
Vezměme libovolné $y \in \tilde{Q}$. Nalezneme $q \in Q$ takové, že $Aq = y$. Protože $\tilde{Q} \subset\subset P \oplus \tilde{Q} = P \oplus Q$, lze (jednoznačně) rozložit $y = p + q$, kde $p \in P$ a $q \in Q$. Platí tedy $q = -p + y$, odkud $Aq = y$.

Q.E.D.

Definice 20: *Nechť $P \subset\subset V$. Existuje-li $Q \subset\subset V$ takový, že $P \oplus Q = V$, říkáme, že Q je* **doplněk** *P do V. Číslo $\dim Q$ nazýváme* **kodimenzí** *P a značíme $\operatorname{codim} P$.*

Poznámka 11: Má-li V konečnou dimenzi, má každý $P \subset\subset V$ kodimenzi a platí

$$\operatorname{codim} P = \dim V - \dim P.$$

Důkaz: : Je-li $\dim V = 0$, je tvrzení triviální. Buď tedy $\dim V = n \in \mathcal{N}$. Mohou nastat 3 případy:

(1) Nechť $\dim P = 0$, tj. $P = \{\theta\}$. Zřejmě $\{\theta\} \oplus V = V$, odkud $\operatorname{codim}\{\theta\} = \dim V = n$.

(2) Nechť $\dim P = k < n$. Označme $(x_1, \ldots, x_k)$ bázi P. Podle věty 10 lze vytvořit bázi V ve tvaru $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Pak zřejmě

$$P \oplus [x_{k+1}, \ldots, x_n]_\lambda = V,$$

neboť $P \cap [x_{k+1}, \ldots, x_n]_\lambda = \{\theta\}$, a podle 1. věty o dimenzi (věta 16) platí

$$\dim P + \operatorname{codim} P = \dim V.$$

(3) Nechť $\dim P = n$. Pak doplněk P do V je $\{\theta\}$ a tedy platí $\operatorname{codim} P = 0$.

Q.E.D.

Věta 32: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\mathrm{h}(A) < \infty$. Potom*

$$\mathrm{h}(A) = \operatorname{codim} \ker A.$$

Důkaz:

(1) Je-li $\mathrm{h}(A) = 0$ neboli $A(P) = \{\theta_Q\}$ neboli $A = \Theta$ a $\ker A = P$, tj. $\operatorname{codim} \ker A = 0$.

(2) Nechť $\mathrm{h}(A) = k \in \mathcal{N}$. Označme $(y_1, \ldots, y_k)$ bázi $A(P)$. Vzor $(y_1, \ldots, y_k)$ při zobrazení A označíme $(x_1, \ldots, x_k)$, podle věty 25 je LN. Buď $\tilde{P} = [x_1, \ldots, x_k]_\lambda$, dokážeme

$$\ker A \oplus \tilde{P} = P,$$

odkud již plyne tvrzení věty.

(a) Inkluze $\ker A + \tilde{P} \subset P$ je zřejmá. Buď naopak $x \in P$ libovolné, chceme najít rozklad $x = p + q$, kde $p \in \tilde{P}$ a $q \in \ker A$. Protože $p \in \tilde{P}$, musí

$$p = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, x_i,$$

kde koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ určíme z podmínky

$$q = x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, x_i \in \ker A.$$

Platí

$$\theta = A(x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, x_i) = Ax - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, Ax_i = Ax - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, y_i$$

neboli

$$Ax = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, y_i,$$

odkud

$$(\forall i \in \hat{k})(\alpha_i = y_i^{\#}(Ax)).$$

Tím je ovšem rozklad $x = p + q \in \tilde{P} + \ker A$ určen.

(b) Ukážeme, že $\tilde{P} \oplus \ker A = P$. Vezměme $x \in \tilde{P} \cap \ker A$, tj. existují $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in T^k$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, x_i,$$

a současně platí

$$\theta = Ax = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, Ax_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, y_i,$$

odkud plyne

$$(\forall i \in \hat{k})(\beta_i = 0),$$

neboť $(y_1, \ldots, y_k)$ je báze $A(P)$. Potom je ale $x = \theta$, tj.

$$\tilde{P} \cap \ker A = \{\theta\}.$$

Q.E.D.

Poznámka 12: Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom $\mathrm{h}(A) \leq \dim P$ a $\mathrm{h}(A) \leq \dim Q$.
Důkaz: Podle definice $\mathrm{h}(A) = \dim A(P)$, protože $A(P) \subset\subset Q$, je $\mathrm{h}(A) \leq \dim Q$. Zbývající nerovnost je zřejmá pro případy $\dim P = \infty$ a $\dim P = 0$. Nechť tedy $\dim P = k \in \mathcal{N}$, buď $(x_1, \ldots, x_k)$ báze P. Je $A(P) = [Ax_1, \ldots, Ax_k]_\lambda$, odkud je $\dim A(P) \leq k$.

Q.E.D.

Věta 33 (2. o dimenzi): *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\dim P < \infty$. Potom*

$$\mathrm{h}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim P.$$

Důkaz: Je $\mathrm{h}(A) \leq \dim P < \infty$. Podle poznámky 11 a věty 32 platí

$$\mathrm{h}(A) = \operatorname{codim} \ker A = \dim P - \dim \ker A.$$

Q.E.D.

Poznámka 13: Hodnosti lineárních funkcionálů:
Buď $\varphi \in V_n^{\#}$. Je-li $\varphi \neq \Theta$ (nulový funkcionál), je $\mathrm{h}(\varphi) = 1$ a $\mathrm{d}(\varphi) = n - 1$. Platí $\mathrm{h}(\Theta) = 0$ a $\mathrm{d}(\Theta) = n$.

Poznámka 14: Skládání lineárních zobrazení jsme zmínili ve větě 22. Připomeňme vlastnosti skládání zobrazení (pokud následující výrazy mají smysl):
(1) $A(B + C) = AB + AC$.
(2) $(A + B)C = AC + BC$.
(3) $\alpha\,(AB) = (\alpha\,A)B = A(\alpha\,B) = (\alpha\,AB)$.
(4) $(AB)C = A(BC)$.
(5) Obecně ale $AB \neq BA$.
Tyto vlastnosti lze shrnout: Skládání zobrazení je asociativní a distributivní, ale obecně ne komutativní.

6. Matice lineárního zobrazení

Úmluva: V celé kapitole budeme používat následující označení: Buďte T číselné těleso, $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ báze P_m, $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ báze Q_n, $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_s)$ báze V_s a $\mathcal{X}^\#$, $\mathcal{Y}^\#$, $\mathcal{W}^\#$ příslušné duální báze.

Definice 21: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$. Matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{n,m}$, jejíž prvky budeme značit ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ij}$, definovanou*

$$(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m}) \left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ij} = y_i^\#(Ax_j) \right),$$

nazýváme **maticí zobrazení A v bázích $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$.**

Speciálně pro $A \in \mathcal{L}(P_m)$ zjednodušíme zápis matice lineárního operátoru v bázích $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ na ${}^{\mathcal{X}}A$.

Věta 34: *Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, $\alpha \in T$. Potom platí*
(1) ${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,
(2) ${}^{\mathcal{X}}(\alpha\, A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz:
(1) Pro prvky s indexy $i \in \hat{n}$, $j \in \hat{m}$ platí

$${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}}_{ij} = y_i^\#((A+B)x_j) = y_i^\#(Ax_j) + y_i^\#(Bx_j) = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ij} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}_{ij},$$

odkud již plyne podle definice sčítání matic tvrzení věty.
(2) Zcela analogicky jako (1).

Q.E.D.

Definice 22: *Nechť*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in T^{m,n},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{ns} \end{pmatrix} \in T^{n,s}.$$

Matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \ldots & \gamma_{ms} \end{pmatrix} \in T^{m,s},$$

definovanou

$$(\forall i \in \hat{m})(\forall j \in \hat{s}) \left(\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, \beta_{kj} \right),$$

nazýváme **součinem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$** *a značíme*

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\ \mathbf{B}.$$

Věta 35: *Nechť $A \in \mathcal{L}(Q_n, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$. Pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P_m, V_s)$ platí*

$$^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Důkaz: Nejprve si uvědomme, že uvedený součin matic má smysl: Z definice matice lineárního zobrazení je $^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} \in T^{s,m}$; $^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \in T^{s,n}$ a $^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} \in T^{n,m}$, tedy $^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} \in T^{s,m}$.

Pro prvek matice $^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}}$ s indexy $i \in \hat{s}$, $j \in \hat{m}$ platí:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}}_{ij} &= w_i^{\#}((AB)x_j) = w_i^{\#}\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}_{kj}\ y_k\right)\right) \\
&= w_i^{\#}\left(\sum_{k=1}^{n} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}_{kj}\ Ay_k\right) = \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}_{kj}\ w_i^{\#}(Ay_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}_{kj}\ {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}}_{ik}\ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}_{kj},
\end{aligned}$$

což podle definice násobení matic dokazuje tvrzení věty.

Q.E.D.

Věta 36: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$, $x \in P_m$. Potom platí*

$$\lceil Ax \rceil_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\ \lceil x \rceil_{\mathcal{X}}.$$

Důkaz: Nejprve podotkněme, že $^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{n,m}$ a $\lceil x \rceil_{\mathcal{X}} \in T^{m,1}$, odkud $^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\ \lceil x \rceil_{\mathcal{X}} \in T^{n,1}$, a $\lceil Ax \rceil_{\mathcal{Y}} \in T^{n,1}$, tj. součin uvedený v tvrzení věty má smysl.

Vezměme vektor $x \in P_m$, nechť

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ x_i,$$

potom platí

$$\begin{aligned}
Ax = A\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ x_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ Ax_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ki}\ y_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ki}\ y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ki}\right)\ y_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ki}\ \alpha_i\right)\ y_k,
\end{aligned}$$

což znamená, že

$$y_k^{\#}(Ax) = \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ki}\ \alpha_i,$$

neboli podle definice maticového násobení tvrzení věty platí.

Q.E.D.

Věta 37:

$$\dim \mathcal{L}(P_m, Q_n) = m \cdot n.$$

Důkaz: Ukážeme, že

$$\mathcal{L}(P_m, Q_n) \cong T^{n,m}.$$

Nalezneme zobrazení $\Phi : \mathcal{L}(P_m, Q_n) \mapsto T^{n,m}$, totiž každému lineárnímu zobrazení přiřadíme jeho matici v bázích $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$:

$$\Phi(A) = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}.$$

(1) Φ je lineární:
Buďte $\alpha \in T$, $A, B \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ libovolné, potom

$$\Phi(\alpha\, A + B) = {}^{\mathcal{X}}(\alpha\, A + B)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \alpha\, \Phi(A) + \Phi(B).$$

(2) Φ je prosté:
Buď $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ takové, že $A \in \ker \Phi$. Je tedy

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}_{ij} = y_i^{\#}(Ax_j) = 0$$

pro všechna $i \in \hat{n}$, $j \in \hat{m}$. Podle věty 36 je proto

$$(\forall x \in P_m)(Ax = \theta),$$

tj. $A = \Theta$ (nulové zobrazení). Tím jsme dokázali

$$\ker \Phi = \{\Theta\}.$$

(3) Φ zobrazuje $\mathcal{L}(P_m, Q_n)$ na $T^{n,m}$:
Buď $\mathbf{A} \in T^{n,m}$ libovolná matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Definujeme zobrazení $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$ pomocí věty 26, tj. udáme obrazy bázových vektorů:

$$Ax_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, y_k,$$

tím je A jednoznačně určeno a platí

$$y_i^{\#}(Ax_j) = \alpha_{ij},$$

tj. vskutku

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}.$$

Φ je tedy izomorfní zobrazení $\mathcal{L}(P_m, Q_n)$ na $T^{n,m}$. Tvrzení věty pak plyne z věty 29 a z faktu, že $dim\, T^{n,m} = mn$.

Q.E.D.

7. Hodnost a její určení

Definice 23: *Nechť* $(x_1, \ldots, x_n)$ *je soubor vektorů z* V. *Číslo* $\dim [x_1, \ldots, x_n]_\lambda$ *nazýváme* **hodností souboru** $(x_1, \ldots, x_n)$ *a značíme* $\mathrm{h}(x_1, \ldots, x_n)$.

Věta 38: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, A *je prosté,* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je soubor vektorů z* P. *Potom platí*

$$\mathrm{h}(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{h}(Ax_1, \ldots, Ax_k).$$

Důkaz: Definujeme zobrazení

$$B = A\big|_{[x_1, \ldots, x_k]_\lambda},$$

toto zobrazení je zřejmě lineární, prosté a zobrazuje $[x_1, \ldots, x_k]_\lambda$ na $[Ax_1, \ldots, Ax_k]_\lambda$. Je tedy B izomorfní:

$$[x_1, \ldots, x_k]_\lambda \cong [Ax_1, \ldots, Ax_k]_\lambda;$$

z definice hodnosti souboru pak plyne tvrzení věty.

Q.E.D.

Věta 39: *Nechť* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je soubor vektorů z* V *nad* T. *Hodnost tohoto souboru se nezmění, provedeme-li libovolnou z následujících* **ekvivalentních** *(elementárních) úprav:*

(1) Zaměníme 2 vektory souboru.

(2) Libovolný vektor souboru vynásobíme nenulovým číslem z tělesa.

(3) Přičteme libovolný vektor souboru k jinému vektoru souboru.

Důkaz: Žádná z elementárních úprav nezmění lineární obal souboru a tím ani dimenzi tohoto obalu.

Q.E.D.

Definice 24: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{m,n}$. **Hodností matice A** *nazýváme hodnost souboru sloupců matice* $\mathbf{A}$ *(jako souboru vektorů z* $T^{m,1}$*) a značíme* $\mathrm{h}(\mathbf{A})$.

Věta 40: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(P_m, Q_n)$. *Potom platí:*

$$\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}),$$

kde $\mathcal{X}$ *je báze* P_m *a* $\mathcal{Y}$ *je báze* Q_n.

Důkaz: Označme $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Platí

$$\begin{aligned}\mathrm{h}(A) &= \dim A(P_m) = \dim A([x_1, \ldots, x_m]_\lambda) = \dim [Ax_1, \ldots, Ax_m]_\lambda \\ &= \mathrm{h}(Ax_1, \ldots, Ax_m).\end{aligned}$$

Definujme souřadnicový izomorfismus (poznámka 10) $B : Q_n \mapsto T^{n,1}$:

$$(\forall y \in Q_n)(By = \lceil y \rceil_{\mathcal{Y}}).$$

Potom

$$[Ax_1, \ldots, Ax_m]_\lambda \cong [\lceil Ax_1 \rceil_{\mathcal{Y}}, \ldots, \lceil Ax_m \rceil_{\mathcal{Y}}]_\lambda,$$

odkud (věta 38)

$$\mathrm{h}(Ax_1, \ldots, Ax_m) = \mathrm{h}(\lceil Ax_1 \rceil_{\mathcal{Y}}, \ldots, \lceil Ax_m \rceil_{\mathcal{Y}}).$$

Je ovšem podle definice hodnosti matice

$$\mathrm{h}({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \mathrm{h}(\lceil Ax_1 \rceil_{\mathcal{Y}}, \ldots, \lceil Ax_m \rceil_{\mathcal{Y}}),$$

odkud už plyne tvrzení věty.

Q.E.D.

Definice 25: *Nechť*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in T^{m,n}.$$

Matici

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \ldots & \alpha'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{n1} & \ldots & \alpha'_{nm} \end{pmatrix} \in T^{n,m},$$

definovanou

$$(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}),$$

nazýváme maticí **transponovanou** *k* **A**.

Věta 41: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{m,n}$. *Potom*

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}^T),$$

tj. počet lineárně nezávislých řádků i sloupců (chápaných jako vektory z prostorů T^n, *resp.* $T^{m,1}$*) je v každé matici stejný.*

Důkaz: Zatím vynecháme; vyplyne z důkazu věty 42, část (2).

Q.E.D.

Definice 26: *Nechť*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \in T^{m,n}.$$

Říkáme, že **B** *je v* **horním stupňovitém tvaru**, *právě když existuje číslo* $\ell \in \hat{m}$ *a přirozená čísla* $1 \leq k_1 < \ldots < k_\ell \leq n$ *tak, že platí*

(1) $(\forall i \in \hat{\ell})(\beta_{ik_i} \neq 0)$,

(2) $(\forall i \in \hat{\ell})(\forall j < k_i)(\beta_{ij} = 0)$,

(3) $(\forall i > \ell)(\forall j \in \hat{n})(\beta_{ij} = 0)$.

Sloupce $k_1, \ldots, k_\ell$ *matice* **B** *nazýváme* **hlavní sloupce**, *ostatní vedlejší.*

Věta 42:

(1) Každou nenulovou matici $\mathbf{A} \in T^{m,n}$ *lze řádkovými ekvivalentními úpravami převést na matici* $\mathbf{B}$ *v horním stupňovitém tvaru.*

(2) Přitom platí $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{B}) = \ell$, *kde* ℓ *je počet nenulových řádků matice* $\mathbf{B}$ *(viz definice 26).*

Důkaz:

(1) Důkaz provedeme indukcí na s-počet nenulových řádků matice $\mathbf{A}$.

(a) Pro $s = 1$ je tvrzení (1) zřejmé: případnou záměnou řádků zajistíme, aby jediný nenulový řádek byl první; matice je po této úpravě zjevně v horním stupňovitém tvaru.

(b) Předpokládejme, že pro $s \in \mathcal{N}$ tvrzení (1) platí. Nechť matice $\mathbf{A}$ má $s+1$ nenulových řádků, nechť jsou to řádky $1, \ldots, s+1$. Prvních s řádků matice $\mathbf{A}$ převedeme na horní stupňovitý tvar, označme příslušné hlavní sloupce $k_1, \ldots, k_r$. V řádku $s+1$ pak přičtením vhodných násobků prvních r řádků vyrobíme 0 v hlavních sloupcích. Řádek $s+1$ je potom buďto nulový, čímž je tvrzení dokázáno, nebo obsahuje alespoň 1 nenulové číslo. Vezměme první nenulový prvek v $s+1$-ním řádku, nechť je ve sloupci k_{r+1}. Řádek $s+1$ zařadíme:

- je-li $k_{r+1} < k_1$, přesuneme řádek $s+1$ před první řádek;
- je-li $k_i < k_{r+1} < k_{i+1}$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, přesuneme řádek $s+1$ mezi řádky i a $i+1$;
- je-li $k_{r+1} > k_r$, ponecháme řádek $s+1$ na místě, je-li $r = s$, jinak ho přesuneme za r-tý řádek jako poslední nenulový.

Po těchto úpravách je matice v horním stupňovitém tvaru.

(2) Označme $\mathbf{A}_{\bullet j}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Jsou-li $k_1, \ldots, k_l$ indexy hlavních sloupců matice $\mathbf{B}$, je soubor $(\mathbf{A}_{\bullet k_1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet k_l})$ bází $[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$ - to je známo ze cvičení (výběr báze ze souboru generátorů!). Rovněž soubor $(\mathbf{B}_{\bullet k_1}, \ldots, \mathbf{B}_{\bullet k_l})$ je LN a vedlejší sloupce matice $\mathbf{B}$ jsou lineární kombinací hlavních. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = dim\,[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda = l = \mathrm{h}(\mathbf{B})$. Přitom vektorový prostor generovaný řádky matice $\mathbf{A}$ je stejný jako vektorový prostor generovaný řádky matice $\mathbf{B}$ (samé ekvivalentní řádkové úpravy!). Ale nenulové řádky matice $\mathbf{B}$ (těch je l) jsou LN. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{h}(\mathbf{B}^T) = l$.

Q.E.D.

Definice 27: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{m,n}$, *nechť* $\mathbf{B} \in T^{m,n}$ *vznikne z* $\mathbf{A}$ *konečným počtem ekvivalentních úprav na soubor řádků a sloupců matice* $\mathbf{A}$. *Potom říkáme, že* $\mathbf{B}$ *je* **ekvivalentní** *s* $\mathbf{A}$, *značíme* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Poznámka 15: *Je-li* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *pak* $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{B})$.

Důkaz: Tvrzení plyne z vět 39 a 41.

Q.E.D.

8. Lineární rovnice

Definice 28: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $b \in Q$. Rovnici $Ax = b$ (x je neznámá) nazýváme* **lineární rovnicí**. *Množinu všech řešení značíme S:*

$$S = \{u \in P | Au = b\} = A^{-1}(b).$$

Věta 43: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $b \in Q$. Lineární rovnice $Ax = b$ je řešitelná tehdy a jen tehdy, když $b \in A(P)$.*

Důkaz: Tvrzení věty plyne z definice $A(P)$:

$$b \in A(P) \Leftrightarrow (\exists u \in P)(Au = b).$$

Q.E.D.

Definice 29: *Je-li v lineární rovnici $Ax = b$ vektor $b \neq \theta$, nazýváme tuto rovnici* **nehomogenní**, *je-li $b = \theta$, nazýváme tuto rovnici* **homogenní**. *Množinu všech řešení homogenní rovnice značíme S_0:*

$$S_0 = \{u \in P | Au = \theta\} = \ker A.$$

Poznámka 16: Homogenní lineární rovnice má vždy alespoň jedno řešení, a to nulový vektor.

Věta 44: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $b \in A(P)$, $\tilde{x} \in P$ takové, že $A\tilde{x} = b$ (tzv. partikulární řešení). Potom*

$$S = \tilde{x} + S_0.$$

Důkaz: Věta 44 je jinou formulací věty 28.

Q.E.D.

Příklad: Uvedeme příklad lineární rovnice. Buďte

$$P = C^2(0, +\infty),$$

tj. množina funkcí definovaných na $(0, +\infty)$ a spojitých včetně své druhé derivace, a

$$Q = C(0, +\infty),$$

tj. množina spojitých funkcí na $(0, +\infty)$. Definujeme operace sčítání funkcí a násobení funkcí číslem

$$(\forall u, v \in P, \text{ resp. } Q)(\forall t \in (0, +\infty))((u + v)(t) = u(t) + v(t)),$$

$$(\forall u \in P, \text{ resp. } Q)(\forall \alpha \in \mathcal{R})(\forall t \in (0, +\infty))((\alpha u)(t) = \alpha u(t)),$$

pak P a Q jsou zřejmě vektorové prostory nad $\mathcal{R}$.

Definujeme nyní zobrazení $A : P \mapsto Q$

$$(Ax)(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x\right)(t),$$

zřejmě je $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Jádro A je tvořeno funkcemi $x \in P$ splňujícími rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 0.$$

Lze ukázat, že

$$\ker A = [x_1, x_2]_\lambda,$$

kde

$$x_1(t) = \exp(2t),$$
$$x_2(t) = \exp(t).$$

Vezměme nyní $v \in Q$, např. $v(t) = \sin t$ a sestavme lineární rovnici $Ax = v$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = \sin t.$$

Podle věty 44 budeme hledat řešení této rovnice ve tvaru

$$x = \tilde{x} + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

kde α_1, α_2 jsou libovolné reálné konstanty a $\tilde{x}$ je řešení nehomogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 \tilde{x}}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} + 2\tilde{x} = \sin t.$$

Definice 30: *Nechť*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in T^{m,n},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in T^{m,1}.$$

Systém rovnic

$$\alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{m1}\xi_1 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m$$

nazýváme **soustavou** m **lineárních rovnic** *o* n *neznámých* $\xi_1, \dots, \xi_n$. *Označme*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in T^{n,1};$$

systém rovnic lze pak zapsat maticově podle pravidel maticového násobení:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Matici $\mathbf{A}$ *nazýváme* **maticí soustavy**, *vektor* $\mathbf{b}$ **vektorem pravých stran** *a vektor* $\mathbf{x} \in T^{n,1}$ **vektorem neznámých**. *Matici*

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix} \in T^{m,n+1}$$

nazýváme **rozšířenou maticí soustavy**.

Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, *nazýváme soustavu* **homogenní**, *jinak* **nehomogenní**. *2 soustavy nazýváme* **ekvivalentní**, *mají-li stejné množiny řešení.*

Poznámka 17: Množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{A} \in T^{m,n}$, tvoří podprostor prostoru $T^{n,1}$.

Věta 45 (Frobeniova):

(1) Soustava m *lineárních rovnic pro* n *neznámých* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *je řešitelná, právě když*

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

(2) Je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = h$, *má soustava* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *právě* $n - h$ *lineárně nezávislých řešení, tj.*

$$S_0 = \begin{cases} \{\mathbf{0}\} & \text{pokud } n = h \\ [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-h}]_\lambda & \text{pro } h < n \end{cases}.$$

Je-li navíc $\mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h$, *pak*

$$S = \tilde{\mathbf{x}} + S_0,$$

kde $\tilde{\mathbf{x}}$ *je partikulární řešení:* $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.

Důkaz:

(1) $\Rightarrow$: Nechť soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathbf{A}_{\bullet j}$ j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{A}_{\bullet j} = \mathbf{b},$$

odkud

$$\mathbf{b} \in [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$$

a tedy

$$[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda = [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \mathbf{b}]_\lambda,$$

a rovnost musí platit i pro dimenze:

$$\dim [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda = \dim [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \mathbf{b}]_\lambda ,$$

což podle definice hodnosti matice znamená

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

$\Leftarrow$: Nechť $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Protože

$$[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda \subset\subset [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \mathbf{b}]_\lambda$$

a přitom platí podle předpokladu rovnost dimenzí, musí

$$[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda = [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \mathbf{b}]_\lambda .$$

To ale znamená, že existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{A}_{\bullet j},$$

maticově

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

neboli soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má řešení, totiž

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

(2) Převedeme soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ na lineární rovnici ve smyslu definice 28. Definujme $A \in \mathcal{L}(T^{n,1}, T^{m,1})$ zadáním matice:

$${}^{\mathcal{E}_n}A^{\mathcal{E}_m} = \mathbf{A}.$$

Potom platí:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow {}^{\mathcal{E}_n}A^{\mathcal{E}_m} \lceil \mathbf{x} \rceil_{\mathcal{E}_n} = \lceil \mathbf{b} \rceil_{\mathcal{E}_m} \Leftrightarrow \lceil A\mathbf{x} \rceil_{\mathcal{E}_m} = \lceil \mathbf{b} \rceil_{\mathcal{E}_m} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

(a) Množina řešení homogenní rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je jádro $\ker A$, pro dimenzi $\ker A$ platí z 2. věty o dimenzi (věta 33) a věty 40

$$\dim \ker A = \mathrm{d}(A) = n - \mathrm{h}(A) = n - \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n - h.$$

(b) Je

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Podle věty 44 má množina řešení rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tvar

$$\tilde{\mathbf{x}} + \ker A,$$

kde $\tilde{\mathbf{x}}$ je partikulární řešení, tj. $A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.

Q.E.D.

Poznámka 18: Podle věty 45 je soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešitelná, právě když $\mathbf{b}$ je lineární kombinací souboru sloupců matice $\mathbf{A}$, tj. sloupec vzniklý z $\mathbf{b}$ nesmí být hlavní sloupec po úpravě rozšířené matice $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ na horní stupňovitý tvar (plyne z věty 42).

9. Lineární variety

Definice 31: *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T, (a, b) soubor vektorů z V. Množinu*

$$\{\alpha a + \beta b | \alpha, \beta \in T, \alpha + \beta = 1\} = \{\lambda a + (1 - \lambda) b | \lambda \in T\}$$

nazýváme **spojnicí vektorů** *a, b.*

Definice 32: *Nechť V je vektorový prostor, $W \subset V$. Říkáme, že W je* **lineární varieta** *ve V, právě když platí*
(1) $W \neq \emptyset$,
(2) W obsahuje s libovolným 2-členným souborem svých vektorů také jejich spojnici.

Poznámka 19: Každý podprostor je lineární varieta, ale ne naopak.

Definice 33: *Nechť V je vektorový prostor nad T, $(x_1, \ldots, x_k)$ soubor vektorů z V, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$. Lineární kombinaci*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

nazýváme **afinní kombinací**, *právě když*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Věta 46: *Každá lineární varieta obsahuje s libovolným souborem svých vektorů také libovolnou afinní kombinaci tohoto souboru.*

Důkaz: Označme W lineární varietu. Tvrzení věty dokážeme matematickou indukcí podle n - počtu vektorů v souboru.

(1) $n = 1$:
Buď $x_1 \in W$, pak $1 \cdot x_1 = x_1 \in W$ je jediná afinní kombinace souboru (x_1).

(2) Nechť pro každý soubor délky n platí: W obsahuje libovolnou afinní kombinaci tohoto souboru. Vezměme libovolný soubor vektorů z W délky $n + 1$, označme jej $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, a libovolné koeficienty $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in T^{n+1}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1.$$

Nejprve dokážeme, že existuje takové i_0, že platí

$$\alpha = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \alpha_i \neq 0.$$

Kdyby totiž

$$(\forall i_0 \in \{1, \ldots, n+1\})(\alpha = 0),$$

musí být

$$(\forall i_0 \in \{1, \ldots, n+1\})(\alpha_{i_0} = 1),$$

odkud ovšem

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = n + 1 \geq 2,$$

což je spor. Provedeme nyní následující úpravu:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \alpha_i x_i + \alpha_{i_0} x_{i_0}$$

$$= \alpha \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i + \alpha_{i_0} x_{i_0},$$

kde platí

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$$

a podle indukčního předpokladu je tedy afinní kombinace

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i \in W,$$

potom je ale

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \alpha \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i + \alpha_{i_0} x_{i_0}$$

bod ze spojnice 2 bodů z W a podle definice lineární variety patří do W.

Q.E.D.

Věta 47: *Nechť V je vektorový prostor, $P \subset\subset V$, $a \in V$. Potom množina $a + P$ je lineární varieta.*

Důkaz: Ověříme vlastnosti lineární variety podle definice 32:

(1) Zřejmě $a + P \neq \emptyset$.

(2) Vezměme libovolně $x, y \in a + P$, $\lambda \in T$. Existují tedy $p, q \in P$ takové, že $x = a + p$ a $y = a + q$. Pro vektor ze spojnice x, y platí

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \lambda(a + p) + (1 - \lambda)(a + q) = a + (\lambda p + (1 - \lambda) q) \in a + P.$$

Q.E.D.

Poznámka 20: Množina řešení nehomogenní lineární rovnice je tedy lineární varieta (pokud je neprázdná).

Věta 48: *Ke každé lineární varietě $W \subset V$ existuje právě 1 podprostor $P \subset\subset V$ takový, že pro každé $a \in W$ platí $W = a + P$.*

Důkaz:

(1) Konstrukce P:
Vezměme libovolné $a_0 \in W$ a definujme

$$P = W - a_0.$$

Potom zřejmě platí $W = a_0 + P$. Ověřme, že $P \subset\subset V$: Buďte $x, y \in P$, $\alpha \in T$. Existují tedy $u, v \in W$ tak, že $x = u - a_0$ a $y = v - a_0$. Potom

$$\alpha x + y = \alpha(u - a_0) + (v - a_0) = (\alpha u + v - \alpha a_0) - a_0 \in W - a_0 = P,$$

neboť $\alpha u + v - \alpha a_0 \in W$, protože jde o afinní kombinaci vektorů z W: $\alpha + 1 - \alpha = 1$.

(2) Dokážeme, že $W = a + P$ pro každé $a \in W$. Buď $a_0 \neq a \in W$, tj. existuje $p \in P$ tak, že $a = a_0 + p$. Potom

$$W = a_0 + P = a + (a_0 - a) + P = a - p + P = a + P.$$

(3) Dokážeme jednoznačnost P. Nechť $\tilde{P} \subset\subset V$ takový, že

$$(\tilde{P} \neq P) \wedge (\forall a \in W)(W = a + \tilde{P}).$$

Potom

$$\tilde{P} = W - a = a_0 - a + P = -p + P = P,$$

což je spor.

Q.E.D.

Definice 34: *Nechť W je lineární varieta ve V, $P \subset\subset V$ takový, že $(\forall a \in W)(W = a + P)$. Podprostor P nazýváme* **zaměřením** *variety W a značíme $\mathcal{Z}(W)$. Jeho dimenzi resp. kodimenzi nazýváme* **dimenzí** *resp.* **kodimenzí variety** *W. Každý nenulový vektor z $\mathcal{Z}(W)$ nazýváme* **směrovým vektorem variety** *W. Každý vektor a takový, že $W = a + \mathcal{Z}(W)$, nazýváme* **vektorem posunutí variety** *W.*

Speciálně

- *varietu o dimenzi 0 nazýváme* **bod**,
- *varietu o dimenzi 1 nazýváme* **přímka**,
- *varietu o dimenzi 2 nazýváme* **rovina**,
- *varietu o kodimenzi 1 nazýváme* **nadrovina**.

Poznámka 21: Nechť W je varieta ve V. Potom

(1) $\mathcal{Z}(W) = W - a$ pro libovolné $a \in W$.

(2) $W \subset\subset V \Leftrightarrow \theta \in W$.

Důkaz:

(1) Viz věta 48.

(2) $\Rightarrow$: $W \subset\subset V \Rightarrow \theta \in W$.
$\Leftarrow$: $\theta \in W \Rightarrow \mathcal{Z}(W) = W - \theta = W$.

Q.E.D.

Definice 35: *Nechť W je lineární varieta ve V nad T, $a \in W$, $\dim W = \ell \in \mathcal{N}$, označme $(a_1, \ldots, a_\ell)$ bázi $\mathcal{Z}(W)$, potom zřejmě*

$$W = \left\{ u \in V \,\middle|\, (\exists(\xi_1, \ldots, \xi_\ell) \in T^\ell) \left(u = a + \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i a_i \right) \right\}.$$

Rovnici

$$u = a + \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i a_i$$

nazýváme **směrovou rovnicí variety** W. *Je-li* $\dim V$ *konečná kladná a rozepíšeme-li směrovou rovnici po souřadnicích ve zvolené bázi* V, *dostaneme* **parametrické rovnice variety** W *ve zvolené bázi.*

Příklad: Přímka v $\mathcal{R}^2$
Směrová rovnice přímky W v $\mathcal{R}^2$ má tvar

$$u = a + \xi b,$$

kde $a \in W$ a zaměření W je $[b]_\lambda$. Označme

$$(u)_{\mathcal{E}_2} = (x, y)$$
$$(a)_{\mathcal{E}_2} = (\alpha_1, \alpha_2)$$
$$(b)_{\mathcal{E}_2} = (\beta_1, \beta_2),$$

potom parametrické rovnice přímky W mají tvar

$$x = \alpha_1 + \xi\beta_1$$
$$y = \alpha_2 + \xi\beta_2,$$

kde $\xi \in \mathcal{R}$.

Věta 49: *Nechť* $P, Q \subset\subset V$, $P \oplus Q = V$, *buď* $A_P : V \mapsto P$ *definované*

$$A_P x = a,$$

kde $x = a + b$, $a \in P$, $b \in Q$. *Potom* $A_P \in \mathcal{L}(V, P)$ *a platí*

$$A_P x = x \Leftrightarrow x \in P,$$
$$A_P x = \theta \Leftrightarrow x \in Q.$$

Důkaz:
(1) Ověříme linearitu A_P:
Buďte $\alpha \in T$, $x = a + b$, $y = c + d$, kde $a, c \in P$ a $b, d \in Q$. Potom

$$A_P(\alpha x + y) = \alpha a + c = \alpha A_P x + A_P y.$$

(2) Dokážeme $A_P x = x \Leftrightarrow x \in P$:
Tvrzení plyne z $P \oplus Q = V$.
(3) Dokážeme $A_P x = \theta \Leftrightarrow x \in Q$:
Tvrzení plyne z $P \oplus Q = V$.

Q.E.D.

Definice 36: *Zobrazení* A_P *zavedené ve větě 49 nazýváme* **projektor na podprostor** P **podle podprostoru** Q.

Poznámka 22: Při označení z věty 49 je také $A_P \in \mathcal{L}(V)$.

Věta 50: *Nechť $\varphi \in V^{\#}$, $\varphi \neq \Theta$, $\alpha \in T$. Potom množina*

$$\{x \in V | \varphi(x) = \alpha\}$$

je nadrovina ve V.

Důkaz: Protože je $\varphi \neq \Theta$, je $\mathrm{h}(\varphi) = 1$ a φ zobrazuje V na T. Existuje tedy $x_0 \in V$ takové, že $\varphi(x_0) = \alpha$. Potom platí

$$\varphi^{-1}(\alpha) = x_0 + \ker \varphi,$$

což je zjevně varieta kodimenze 1, neboť podle věty 32

$$\operatorname{codim} \ker \varphi = \mathrm{h}(\varphi) = 1.$$

Q.E.D.

Věta 51: *Nechť $W = a + P$ je varieta ve V, $\operatorname{codim} W = \ell \in \mathcal{N}$. Potom existuje LN soubor lineárních funkcionálů z $V^{\#}$ $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$ a ℓ-tice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in T^\ell$ tak, že platí*

$$W = \{x \in V | (\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(x) = \alpha_i)\},$$

tj. každou lineární varietu o kodimenzi ℓ lze vyjádřit jako průnik ℓ nadrovin (viz věta 50).

Důkaz: Máme $P \subset\subset V$, $\operatorname{codim} P = \ell$. Existuje tedy $Q \subset\subset V$ (doplněk P do V) takový, že $\dim Q = \ell$ a $V = Q \oplus P$. Označme $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_\ell)$ bázi Q. Definujme pro $i \in \hat{\ell}$

$$\varphi_i = x_i^{\#} A_Q,$$

kde A_Q je projektor na Q podle P. Položme

$$(\forall i \in \hat{\ell})(\alpha_i = \varphi_i(a)).$$

(1) Ověříme, že $\varphi_i \in V^{\#}$:
Zřejmě $\varphi_i : V \mapsto T$. Linearita φ_i je také zřejmá: φ_i je definováno složením dvou lineárních zobrazení (projektoru a souřadnicového funkcionálu).

(2) Dokážeme, že soubor $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$ je LN:
Kdyby existovala netriviální lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i = \Theta,$$

tj.

$$(\forall x \in V)\left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i(x) = 0\right),$$

potom speciálně pro vektory $x_1, \ldots, x_\ell$ musí

$$(\forall j \in \hat{\ell}) \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i(x_j) = 0 \right).$$

Je však s využitím věty 49 pro každé $j \in \hat{\ell}$

$$\varphi_i(x_j) = x_i^{\#}(A_Q x_j) = x_i^{\#}(x_j) = \delta_{ij},$$

odkud

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \varphi_i(x_j) = \alpha_j,$$

a to je spor.

(3) $W \subset \{x \in V | (\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(x) = \alpha_i)\}$:

Buď $x \in W$, potom existuje $p \in P$ tak, že $x = a + p$. Pak podle věty 49 pro všechna $i \in \hat{\ell}$

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(a) + \varphi_i(p) = \alpha_i + x_i^{\#}(A_Q p) = \alpha_i + x_i^{\#}(\theta) = \alpha_i,$$

tj. $x \in \{x \in V | (\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(x) = \alpha_i)\}$.

(4) $\{x \in V | \varphi_i(x) = \alpha_i\} \subset W$:

Buď $(\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(x) = \alpha_i)$; protože $\varphi_i(a) = \alpha_i$, platí

$$(\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(x - a) = 0),$$

odkud

$$x - a \in \bigcap_{i=1}^{\ell} \ker \varphi_i$$

neboli

$$x = a + (x - a) \in a + \bigcap_{i=1}^{\ell} \ker \varphi_i.$$

Dokážeme-li

$$\bigcap_{i=1}^{\ell} \ker \varphi_i \subset P,$$

dostáváme

$$x \in a + P = W.$$

Vezměme proto $y \in \bigcap_{i=1}^{\ell} \ker \varphi_i$, tj.

$$(\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(y) = x_i^{\#}(A_Q y) = 0),$$

odkud

$$(A_Q y)_{\mathcal{X}} = (0, \ldots, 0)$$

a tedy

$$A_Q y = \theta,$$

což je podle věty 49 ekvivalentní s $y \in P$.

Q.E.D.

Definice 37: *Nechť W je lineární varieta ve V, $\operatorname{codim} W = \ell$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$ je LN soubor lineárních funkcionálů z $V^\#$ a ℓ-tice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in T^\ell$ tak, že platí*

$$W = \{x \in V | (\forall i \in \hat{\ell})(\varphi_i(x) = \alpha_i)\}.$$

Rovnice

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ \varphi_\ell(x) &= \alpha_\ell \end{aligned}$$

nazýváme **vektorové rovnice variety** W. *Je-li* $\dim V$ *konečná kladná a rozepíšeme-li vektorové rovnice ve zvolené bázi V a k ní duální bázi $V^\#$, dostaneme* **neparametrické rovnice variety** W.

Poznámka 23: Vysvětleme podrobněji sestavení neparametrických rovnic variety. Zvolme $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ bázi V a $\mathcal{X}^\# = (x_1^\#, \ldots, x_n^\#)$ duální bázi $V^\#$. Potom existují koeficienty α_{ij} takové, že

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11} x_1^\# + \ldots + \alpha_{1n} x_n^\# \\ &\vdots \\ \varphi_\ell &= \alpha_{\ell 1} x_1^\# + \ldots + \alpha_{\ell n} x_n^\#. \end{aligned}$$

Vektorové rovnice variety W mají potom tvar

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1^\#(x) + \ldots + \alpha_{1n} x_n^\#(x) &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{\ell 1} x_1^\#(x) + \ldots + \alpha_{\ell n} x_n^\#(x) &= \alpha_\ell. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$(x)_{\mathcal{X}} = (\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

pak $x \in W$, právě když souřadnice x v bázi $\mathcal{X}$ vyhovují soustavě lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \xi_1 + \ldots + \alpha_{1n} \xi_n &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{\ell 1} \xi_1 + \ldots + \alpha_{\ell n} \xi_n &= \alpha_\ell. \end{aligned}$$

Tuto soustavu pak nazýváme neparametrickými rovnicemi variety W.

Označme ve shodě s kapitolou 8

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\ell 1} & \dots & \alpha_{\ell n} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

a soustavu neparametrických rovnic variety W zapišme maticově

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Vyjádříme-li řešení soustavy neparametrických rovnic ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{x}} + S_0,$$

kde

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_n \end{pmatrix}$$

je partikulární řešení soustavy neparametrických rovnic s pravou stranou a S_0 je množina všech řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

dostaneme při rozepsání po složkách parametrické rovnice variety W (viz definice 35) v bázi $\mathcal{X}$. Podrobněji, je-li

$$S_0 = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-l}]_\lambda,$$

kde $l = \mathrm{h}(\mathbf{A})$, pak platí:

$$W = \{x \in V \,|\, \lceil x \rceil_{\mathcal{X}} \in \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-l}]_\lambda\}.$$

Příklad: Buď W přímka v $\mathcal{R}^2$. Její vektorová rovnice má tvar

$$\varphi(u) = \alpha,$$

kde

$$\varphi = \alpha_1 e_1^\# + \alpha_2 e_2^\#.$$

Označíme-li

$$(u)_{\mathcal{E}_2} = (x, y),$$

má neparametrická rovnice přímky tvar

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha.$$

Řešení neparametrické rovnice můžeme psát ve tvaru

$$x = \tilde{x} + \alpha_2 t$$
$$y = \tilde{y} - \alpha_1 t,$$

kde $\alpha_1 \tilde{x} + \alpha_2 \tilde{y} = \alpha$ a $t \in \mathcal{R}$, což jsou parametrické rovnice přímky.

Definice 38: *Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety ve V. Říkáme, že W_1, W_2 jsou*

- **rovnoběžné** $\Leftrightarrow (\mathcal{Z}(W_1) \subset \mathcal{Z}(W_2)) \vee (\mathcal{Z}(W_2) \subset \mathcal{Z}(W_1))$,
- **mimoběžné** $\Leftrightarrow$ *nejsou rovnoběžné a* $W_1 \cap W_2 = \emptyset$,
- **různoběžné** $\Leftrightarrow$ *nejsou rovnoběžné a* $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Definice 39: *Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety ve V mimoběžné nebo disjunktní rovnoběžné. Říkáme, že $W \subset V$ je* **příčka variet** *W_1, W_2, právě když W je přímka taková, že $W \cap W_1 \neq \emptyset$ a $W \cap W_2 \neq \emptyset$.*

Lemma 2: *Nechť $\emptyset \neq A, B \subset V$, $\alpha \in T$. Potom platí*

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

Důkaz:

(1) $\subset$: Zřejmé, viz poznámka 5.

(2) $\supset$: Buď $x \in \alpha A + \alpha B$, tj. $x = u + v$, kde $u = \alpha a \in \alpha A$ pro nějaké $a \in A$ a podobně $v = \alpha b \in \alpha B$ pro nějaké $b \in B$. Potom $x = \alpha(a + b)$, kde $a + b \in A + B$, a tedy $x \in \alpha(A + B)$.

Q.E.D.

Věta 52: *Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety ve V, $\alpha, \beta \in T$. Potom*

$$\alpha W_1 + \beta W_2$$

je také lineární varieta ve V a platí

$$\mathcal{Z}(\alpha W_1 + \beta W_2) = \alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2).$$

Důkaz: Buďte

$$W_1 = a + \mathcal{Z}(W_1),$$
$$W_2 = b + \mathcal{Z}(W_2).$$

Potom s využitím lemmatu 2 platí

$$\begin{aligned}\alpha W_1 + \beta W_2 &= \alpha(a + \mathcal{Z}(W_1)) + \beta(b + \mathcal{Z}(W_2)) = \alpha a + \alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta b + \beta \mathcal{Z}(W_2) \\ &= (\alpha a + \beta b) + (\alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2)),\end{aligned}$$

kde $\alpha a + \beta b \in V$ a $\alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2) \subset\subset V$, tedy $\alpha W_1 + \beta W_2$ je lineární varieta ve V se zaměřením $\alpha \mathcal{Z}(W_1) + \beta \mathcal{Z}(W_2)$.

Q.E.D.

Věta 53: *Nechť $\{W_i | i \in \mathcal{J}\}$ je neprázdný ($\mathcal{J} \neq \emptyset$) systém lineárních variet ve V. Potom $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i$ je buď prázdný, nebo lineární varieta ve V. Je-li $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i \neq \emptyset$, potom platí*

$$\mathcal{Z}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}(W_i).$$

Důkaz: Označme

$$W = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i.$$

(1) Ověřme, že pokud $W \neq \emptyset$, je W lineární varieta ve V:
Buďte $x, y \in W$, $\lambda \in T$, tj. $(\forall i \in \mathcal{J})(x, y \in W_i)$, protože W_i jsou lineární variety, také platí

$$(\forall i \in \mathcal{J})(\lambda x + (1 - \lambda) y \in W_i),$$

tj. $\lambda x + (1 - \lambda) y \in W$.

(2) Buď $W \neq \emptyset$. Vezměme $a \in W$. Lze tedy psát

$$(\forall i \in \mathcal{J})(\mathcal{Z}(W_i) = W_i - a).$$

Protože $W = a + \mathcal{Z}(W)$, je

$$\mathcal{Z}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i - a.$$

Dokážeme-li

$$\bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i - a = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} (W_i - a),$$

je tvrzení věty dokázáno, neboť celkem

$$\mathcal{Z}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} (W_i - a) = \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{Z}(W_i).$$

Zřejmě však:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i - a &\Leftrightarrow x + a \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} W_i \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{J})(x + a \in W_i) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{J})(x \in W_i - a) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in \mathcal{J}} (W_i - a). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Věta 54: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, W je lineární varieta v P. Potom její obraz $A(W)$ je varieta v Q a platí*

$$\mathcal{Z}(A(W)) = A(\mathcal{Z}(W)).$$

Důkaz: Buď $W = a + \mathcal{Z}(W)$, kde $a \in W$. Potom vzhledem k linearitě A platí

$$A(W) = A(a + \mathcal{Z}(W)) = Aa + A(\mathcal{Z}(W)),$$

protože $Aa \in Q$ a $A(\mathcal{Z}(W)) \subset\subset Q$, je $A(W)$ lineární varieta v Q se zaměřením $A(\mathcal{Z}(W))$.

Q.E.D.

Věta 55: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, W je lineární varieta v Q. Potom vzor $A^{-1}(W)$ je buď prázdná množina, nebo lineární varieta v P. Je-li $A^{-1}(W) \neq \emptyset$, pak pro zaměření platí*

$$\mathcal{Z}\left(A^{-1}(W)\right) = A^{-1}(\mathcal{Z}(W)).$$

Důkaz:

(1) Pro $A^{-1}(W)$ jsou 2 možnosti:

(a) $A(P) \cap W = \emptyset \Rightarrow A^{-1}(W) = \emptyset$.

(b) $A(P) \cap W \neq \emptyset \Rightarrow A^{-1}(W) \neq \emptyset$. Ověříme, že $A^{-1}(W)$ je lineární varieta: Buďte $x, y \in A^{-1}(W)$ a $\lambda \in T$. Potom $Ax, Ay \in W$ a platí tedy

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \in W,$$

odkud

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A^{-1}(W).$$

(2) Nechť $A^{-1}(W) \neq \emptyset$. Buď $a \in A^{-1}(W)$, tj. $Aa \in W$ a $W = Aa + \mathcal{Z}(W)$. Protože $A^{-1}(W) = a + \mathcal{Z}\left(A^{-1}(W)\right)$, stačí dokázat

$$A^{-1}(W) - a = A^{-1}(W - Aa),$$

neboť potom

$$\mathcal{Z}\left(A^{-1}(W)\right) = A^{-1}(W - Aa) = A^{-1}(\mathcal{Z}(W)).$$

Je ovšem

$$\begin{aligned} x \in A^{-1}(W) - a &\Leftrightarrow x + a \in A^{-1}(W) \\ &\Leftrightarrow A(x+a) \in W \\ &\Leftrightarrow Ax \in W - Aa \\ &\Leftrightarrow x \in A^{-1}(W - Aa). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Definice 40: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V. Množinu všech afinních kombinací tohoto souboru nazýváme* **afinní obal souboru** $(x_1, \ldots, x_k)$ *a značíme*

$$[x_1, \ldots, x_k]_\alpha .$$

Věta 56: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V. Potom platí:*

(1) $(\forall i \in \hat{k})(x_i \in [x_1, \ldots, x_k]_\alpha)$.

(2) $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha$ *je lineární varieta ve V.*

(3) $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha = \bigcap_{W \text{ je lin. varieta ve } V,\ \{x_1,\ldots,x_k\} \subset W} W.$

Důkaz:

(1) Triviální:

$$x_i = \sum_{j=1}^{k} \delta_{ij} x_j,$$

tato kombinace je zjevně afinní.

(2) Zvolme libovolně $x, y \in [x_1, \ldots, x_k]_\alpha$ a $\lambda \in T$. Existují tedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$ a $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in T^k$ tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,$$

$$y = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

a

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1.$$

Pro bod ze spojnice x, y pak platí

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \sum_{i=1}^{k} (\lambda \alpha_i + (1-\lambda)\beta_i) x_i;$$

zbývá ověřit, že jde o afinní kombinaci souboru $(x_1, \ldots, x_k)$. Je ale

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda \alpha_i + (1-\lambda)\beta_i) = \lambda \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

(3) Dokážeme 2 inkluze:

(a) $\displaystyle\bigcap_{W \text{ je lin. varieta ve } V,\ \{x_1,\ldots,x_k\} \subset W} W \subset [x_1, \ldots, x_k]_\alpha$:

Podle (1) a (2) $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha$ je taková lineární varieta ve V, že obsahuje vektory $x_1, \ldots, x_k$. Průnik všech takových lineárních variet je tedy podmnožinou $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha$.

(b) $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha \subset \displaystyle\bigcap_{W \text{ je lin. varieta ve } V,\ \{x_1,\ldots,x_k\} \subset W} W$:

Buď $x \in [x_1, \ldots, x_k]_\alpha$, existuje tedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$ tak, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

a

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Pro každou W lineární varietu ve V, pro kterou $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset W$, podle věty 46 platí $x \in W$, odkud ale

$$x \in \bigcap_{W \text{ je lin. varieta ve } V,\ \{x_1,\ldots,x_k\} \subset W} W.$$

Q.E.D.

Věta 57: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V, $j_0 \in \hat{k}$. Potom*

$$\mathcal{Z}\left([x_1, \ldots, x_k]_\alpha\right) = \left[(x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k}}\right]_\lambda,$$

tj.

$$\dim [x_1, \ldots, x_k]_\alpha \leq k - 1.$$

Důkaz: Lze psát

$$\mathcal{Z}\left([x_1, \ldots, x_k]_\alpha\right) = [x_1, \ldots, x_k]_\alpha - x_{j_0}.$$

(1) Dokážeme $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha - x_{j_0} \subset \left[(x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k}}\right]_\lambda$:
Buď $x \in [x_1, \ldots, x_k]_\alpha - x_{j_0}$, tj. existuje $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$ tak, že

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j - x_{j_0}$$

a

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1.$$

Potom

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j - \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right) x_{j_0} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x_j - x_{j_0}),$$

neboli $x \in \left[(x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k}}\right]_\lambda$.

(2) Dokážeme $\left[(x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k}}\right]_\lambda \subset [x_1, \ldots, x_k]_\alpha - x_{j_0}$:
Buď $x \in \left[(x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k}}\right]_\lambda$, tj. existují koeficienty α_j takové, že

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x_j - x_{j_0}).$$

Protože sčítanec pro $j = j_0$ je nulový, lze psát

$$x = \sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \alpha_j (x_j - x_{j_0}) = \sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \alpha_j x_j - \Big(\sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \alpha_j\Big) x_{j_0} =$$

$$\Big[\sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \alpha_j x_j + \Big(1 - \sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \alpha_j\Big) x_{j_0}\Big] - x_{j_0}$$

neboli $x \in [x_1, \ldots, x_k]_\alpha - x_{j_0}$, neboť vektor v hranaté závorce leží v $[x_1, \ldots, x_k]_\alpha$.

Q.E.D.

Definice 41: *Nechť* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je soubor vektorů z* V. *Číslo* $\dim [x_1, \ldots, x_k]_\alpha$ *nazýváme* **afinní hodnost souboru** $(x_1, \ldots, x_k)$ *a značíme* $\mathrm{h}_\alpha(x_1, \ldots, x_k)$.

Definice 42: *Nechť* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je soubor vektorů z* V. *Říkáme, že tento soubor je* **afinně nezávislý (AN)**, *je-li*

$$\mathrm{h}_\alpha(x_1, \ldots, x_k) = k - 1,$$

a **afinně závislý (AZ)**, *je-li*

$$\mathrm{h}_\alpha(x_1, \ldots, x_k) < k - 1.$$

Poznámka 24:
(1) Jednočlenný soubor (x_1) je AN.
(2) Buď $k \geq 2$, $j_0 \in \hat{k}$. Pak

$$(x_1, \ldots, x_k) \text{ je AN } \Leftrightarrow (x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k} \setminus \{j_0\}} \text{ je LN.}$$

Věta 58: *Nechť* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je soubor vektorů z* V, $k \geq 2$. *Potom* $(x_1, \ldots, x_k)$ *je AN právě tehdy, když*

$$(\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k) \left(\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta \wedge \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0 \right) \Rightarrow \alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0 \right).$$

Důkaz: Nejdříve uvažme (viz poznámka 24), že pro každé pevné $j_0 \in \hat{k}$

$$(x_1, \ldots, x_k) \text{ je AN } \Leftrightarrow S = (x_j - x_{j_0})_{j \in \hat{k} \setminus \{j_0\}} \text{ je LN}$$

Zvolme tedy $j_0 \in \hat{k}$.
(1) Dokážeme, že

$$S \text{ je LN} \Rightarrow$$

$$(\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k) \left(\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta \wedge \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0 \right) \Rightarrow \alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0 \right):$$

Vezměme tedy libovolně $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0.$$

Potom

$$\theta = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j - \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \right) x_{j_0}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x_j - x_{j_0}) = \sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \alpha_j (x_j - x_{j_0}),$$

což je ovšem lineární kombinace LN souboru S dávající nulový vektor, tj. musí být

$$(\forall j \in \hat{k} \setminus \{j_0\})(\alpha_j = 0).$$

Z rovnosti

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0$$

pak také $\alpha_{j_0} = 0$, tedy celkem

$$(\forall j \in \hat{k})(\alpha_j = 0).$$

(2) Dokážeme, že

$$(\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k) \left(\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta \wedge \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0 \right) \Rightarrow \alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0 \right) \Rightarrow$$

S je LN :

Vezměme lineární kombinaci souboru S dávající nulový vektor:

$$\theta = \sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \beta_j (x_j - x_{j_0}) = \sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \beta_j x_j - \left(\sum_{j=1, j \neq j_0}^{k} \beta_j \right) x_{j_0}$$

a položme

$$(\forall j \in \hat{k} \setminus \{j_0\})(\alpha_j = \beta_j),$$

$$\alpha_{j_0} = - \sum_{j=1, j \neq j_0} \beta_j.$$

Potom platí

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0,$$

podle předpokladu tedy musí platit

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$$

a proto

$$(\forall j \in \hat{k} \setminus \{j_0\})(\beta_j = 0).$$

Q.E.D.

10. Konvexní množiny

Definice 43: *Nechť V je vektorový prostor nad T, (a, b) soubor vektorů z V. Množinu*

$$\{\alpha a + \beta b | \alpha, \beta \in T, \alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$$
$$= \{\lambda a + (1 - \lambda) b | \lambda \in T, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

nazýváme **úsečkou spojující vektory** *a, b.*

Definice 44: *Nechť V je vektorový prostor, $K \subset V$. Říkáme, že K je* **konvexní množina**, *právě když platí*
(1) $K \neq \emptyset$,
(2) K obsahuje s libovolným 2-členným souborem svých vektorů úsečku spojující tyto 2 vektory.

Definice 45: *Nechť V je vektorový prostor nad T, $(x_1, \ldots, x_k)$ soubor vektorů z V, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in T^k$. Lineární kombinaci*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

nazýváme **konvexní kombinací**, *právě když*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \wedge (\forall i \in \hat{k})(\alpha_i \geq 0).$$

Věta 59: *Každá konvexní množina obsahuje s libovolným souborem svých vektorů také libovolnou jeho konvexní kombinaci.*

Důkaz: Zcela analogicky jako ve větě 46 pro lineární variety.

Q.E.D.

Věta 60: *Nechť $\{K_i | i \in \mathcal{J}\}$ je neprázdný ($\mathcal{J} \neq \emptyset$) systém konvexních množin ve V. Potom*

$$\bigcap_{i \in \mathcal{J}} K_i$$

je buď prázdný, nebo konvexní množina ve V.

Důkaz: Zcela analogicky jako ve větě 53 pro lineární variety.

Q.E.D.

Definice 46: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V. Množinu všech konvexních kombinací tohoto souboru nazýváme* **konvexní obal** *souboru $(x_1, \ldots, x_k)$ a značíme*

$$[x_1, \ldots, x_k]_\kappa .$$

Věta 61: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V. Pak platí:*
(1) $(\forall i \in \hat{k})(x_i \in [x_1, \ldots, x_k]_\kappa)$.
(2) $[x_1, \ldots, x_k]_\kappa$ je konvexní množina.

(3) $[x_1, \ldots, x_k]_\kappa = \bigcap_{K \subset V \text{ konvexní}, \{x_1, \ldots, x_k\} \subset K} K.$

Důkaz: Viz věta 56 pro lineární variety.

Q.E.D.

Definice 47: *Nechť $k \in \mathcal{N}_0$, $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ je AN soubor vektorů z V. Konvexní obal souboru $(x_1, \ldots, x_k)$ nazýváme* **k-simplex s vrcholy** $x_0, \ldots, x_k$. *Speciálně pro $k \in \{0, 1, 2, 3\}$*

- $[x_0]_\kappa$ *nazýváme* **bod**,
- $[x_0, x_1]_\kappa$ *nazýváme* **úsečka**,
- $[x_0, x_1, x_2]_\kappa$ *nazýváme* **trojúhelník**,
- $[x_0, x_1, x_2, x_3]_\kappa$ *nazýváme* **čtyřstěn**.

Poznámka 25: Obdobně lze definovat lineární, afinní a konvexní obal množiny $M \subset V$ jako množinu všech lineárních (afinních, konvexních) kombinací všech souborů vektorů z M. Lze ukázat, že pro tyto obaly platí věty analogické větám pro obaly souboru vektorů.

11. Inverzní operátor a matice, změna báze

Definice 48: *Zobrazení $E : V \mapsto V$ definované vztahem $(\forall x \in V)(Ex = x)$ nazýváme* **identický operátor** *na V.*

Poznámka 26:

(1) Nechť $E \in \mathcal{L}(V)$ a $A \in \mathcal{L}(V)$. Pak $AE = EA = A$.

(2) Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, A je regulární. Pak $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Věta 62: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$.*

(a) Existuje-li $B \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $AB = E$, pak A je epimorfní.

(b) Existuje-li $C \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $CA = E$, pak A je monomorfní.

(c) Jsou-li splněny předpoklady (a) a (b), pak A je regulární a platí

$$C = B = A^{-1}.$$

Důkaz:

(a) Chceme dokázat, že $(\forall y \in V)(\exists x \in V)(y = Ax)$. Nechť tedy $y \in V$. Definujme $x = By$. Pak $Ax = A(By) = (AB)y = Ey = y$.

(b) Dokažme, že v jádru operátoru A leží pouze nulový prvek. Nechť $x \in A^{-1}(\theta)$. Pak $Ax = \theta$. Odtud

$$C(Ax) = (CA)x = Ex = x$$

a

$$C(Ax) = C(\theta) = \theta,$$

tedy platí rovnost

$$x = \theta.$$

(c) A je epimorfní a monomorfní, tedy A je regulární. Dále platí

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B,$$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1},$$

tedy

$$B = A^{-1}.$$

Rovnost

$$C = A^{-1}$$

ověříme stejným způsobem.

Q.E.D.

Poznámka 27:

(1) Má-li V konečnou dimenzi a je-li splněn předpoklad a) nebo b), je A regulární a platí $B = A^{-1}$, resp. $C = A^{-1}$.

(2) Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, A je regulární. Potom $(A^{-1})^{-1} = A$.

Důkaz: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, tedy A je inverzní k A^{-1}.

Q.E.D.

Věta 63: *Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, A a B jsou regulární. Potom AB je také regulární a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Důkaz: Protože platí rovnosti

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AE)A^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = [B^{-1}(A^{-1}A)]B = (B^{-1}E)B = E,$$

platí podle předchozí věty, že operátor AB je regulární a operátor $B^{-1}A^{-1}$ je inverzní k operátoru AB.

Q.E.D.

Definice 49: *Matici $A \in T^{n,n}$ nazýváme* **čtvercovou maticí řádu n**. *Čtvercovou matici* **A** *n-tého řádu nazýváme* **regulární** *právě když* $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = n$. *Je-li* $\mathrm{h}(\mathbf{A}) < n$, *nazýváme ji* **singulární**. *Matici* $\mathbf{E} \in T^{n,n}$, *kde* $\mathbf{E}_{ij} = \delta_{ij}$, *nazýváme* **jednotkovou** *maticí n-tého řádu.*

Poznámka 28:

(1) Pokud $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in T^{n,n}$, pak

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}.$$

(2) Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\mathcal{X}$ je báze V_n. Potom

$${}^{\mathcal{X}}A = \mathbf{E} \Leftrightarrow A = E.$$

Důkaz:

(1) plyne z definice násobení matic;

(2) $\Rightarrow$: Protože $(\forall j \in \hat{n})(Ax_j = x_j)$, platí rovnost $A = E$.

$\Leftarrow$: Zřejmé.

Q.E.D.

Věta 64: *Nechť $\mathbf{A} \in T^{n,n}$ je regulární. Potom existuje právě 1 regulární matice $\mathbf{B} \in T^{n,n}$ taková, že $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.*

Důkaz: Definujme zobrazení $A \in \mathcal{L}(T^n)$ takové, že ${}^{\mathcal{E}}A = \mathbf{A}$. Potom platí :

$$\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}({}^{\mathcal{E}}A) = \mathrm{h}(A) = n,$$

tedy A je epimorfní a proto i regulární. Existuje tedy $A^{-1} \in \mathcal{L}(T^n)$ a je regulární. Definujme matici **B** vztahem

$$\mathbf{B} = {}^{\mathcal{E}}(A^{-1}),$$

tedy $\mathbf{B} \in T^{n,n}$, **B** je regulární. Dále platí

$$\mathbf{AB} = {}^{\mathcal{E}}A\,{}^{\mathcal{E}}(A^{-1}) = {}^{\mathcal{E}}(AA^{-1}) = {}^{\mathcal{E}}E = \mathbf{E}.$$

Podobně ukážeme, že

$$\mathbf{BA} = \mathbf{E}.$$

Zbývá dokázat jednoznačnost matice **B**. Předpokládejme, že existuje $\mathbf{C} \in T^{n,n}$ taková, že $\mathbf{CA} = \mathbf{AC} = \mathbf{E}$. Pak platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{BE} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{EC} = \mathbf{C}.$$

Tedy $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Q.E.D.

Definice 50: *Matici* $\mathbf{B}$ *z předchozí věty nazýváme maticí* **inverzní** *k matici* $\mathbf{A}$ *a značíme* $\mathbf{A}^{-1}$.

Věta 65: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{n,n}$. *Existuje-li* $\mathbf{B} \in T^{n,n}$ *taková, že* $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ *nebo* $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$, *je* $\mathbf{A}$ *regulární a platí*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Důkaz: Nechť $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Definujme zobrazení $A, B \in \mathcal{L}\ (T^n)$ taková, že ${}^{\mathcal{E}}A = \mathbf{A}$ a ${}^{\mathcal{E}}B = \mathbf{B}$. Pak platí

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} = {}^{\mathcal{E}}A\,{}^{\mathcal{E}}B = {}^{\mathcal{E}}(AB).$$

Tedy $AB = E$. Odtud podle poznámky 26,(1) je A regulární, tedy i $\mathbf{A}$ je regulární a existuje $\mathbf{A}^{-1}$. Rovnost

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}$$

vynásobíme maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva a dostaneme

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Q.E.D.

Poznámka 29:
(1) Nechť $\mathbf{A} \in T^{n,n}$ *je regulární. Potom* $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
(2) : Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in T^{n,n}$, $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou regulární. Pak* $\mathbf{AB}$ *je také regulární a platí*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Důkaz: Stejný jako pro operátory.

Věta 66: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(V_n)$, A *je regulární. Nechť* $\mathcal{X}$ *je báze* V_n. *Potom*

$${}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = ({}^{\mathcal{X}}A)^{-1}.$$

Důkaz: Protože $AA^{-1} = E$, platí ${}^{\mathcal{X}}(AA^{-1}) = {}^{\mathcal{X}}E$ a tedy

$${}^{\mathcal{X}}A\,{}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = \mathbf{E}.$$

Podle věty 65 platí, že matice ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})$ je inverzní k matici ${}^{\mathcal{X}}A$.

Q.E.D.

Věta 67 (Gaussova metoda k nalezení inverzní matice): *Každou regulární matici* $A \in T^{n,n}$ *lze ekvivalentními řádkovými úpravami převést na jednotkovou matici. Převedeme-li* $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \in T^{n,2n}$ *ekvivalentními řádkovými úpravami na matici* $(\mathbf{E}|\mathbf{B})$, *pak platí*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Důkaz: Snadno se dá ukázat, že libovolnou ekvivalentní řádkovou úpravu matice $\mathbf{A}$ můžeme získat jejím vynásobením jistou maticí zleva. Platí tedy

$$(\mathbf{M_k}\mathbf{M_{k-1}}\dots\mathbf{M_1})\mathbf{A} = \mathbf{E} \tag{1}$$

a současně

$$(\mathbf{M_k M_{k-1} \dots M_1})\mathbf{E} = \mathbf{B}. \tag{2}$$

Z rovnice (1) vyplývá, že

$$(\mathbf{M_k M_{k-1} \dots M_1}) = \mathbf{A}^{-1}$$

a z rovnice (2) pak vyplývá, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Q.E.D.

Definice 51: *Nechť $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}$ jsou báze V_n. Matici ${}_{\mathcal{X}}P_{\tilde{\mathcal{X}}} \in T^{n,n}$, kde $({}_{\mathcal{X}}P_{\tilde{\mathcal{X}}})_{ij} = x_i^{\#}(\tilde{x}_j)$, nazýváme* **maticí přechodu** *od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\tilde{\mathcal{X}}$.*

Věta 68: *Nechť $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}$ jsou báze V_n. Potom platí:*

1) ${}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}} = {}^{\tilde{\mathcal{X}}}\mathbf{E}^{\mathcal{X}}$,

2) ${}_{\tilde{\mathcal{X}}}\mathbf{P}_{\mathcal{X}} = ({}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}})^{-1}$.

Důkaz: Důkaz vztahu 1) plyne z následujících rovností:

$$({}_{\mathcal{X}}P_{\tilde{\mathcal{X}}})_{ij} = x_i^{\#}(\tilde{x}_j) = x_i^{\#}(E\tilde{x}_j) = {}^{\tilde{\mathcal{X}}}E_{ij}^{\mathcal{X}}.$$

Využitím vztahu 1) dostáváme důkaz vztahu 2):

$${}_{\tilde{\mathcal{X}}}\mathbf{P}_{\mathcal{X}}\,{}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\tilde{\mathcal{X}}}\,{}^{\tilde{\mathcal{X}}}E^{\mathcal{X}} = {}^{\tilde{\mathcal{X}}}(EE) = {}^{\tilde{\mathcal{X}}}E = \mathbf{E}.$$

Q.E.D.

Poznámka 30: *Ze vztahu 1) předchozí věty vyplývá, že matice ${}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}}$ je regulární.*

Věta 69: *Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}$ jsou báze prostoru P, $\mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}$ jsou báze prostoru Q. Potom platí*

$${}^{\tilde{\mathcal{X}}}A^{\tilde{\mathcal{Y}}} = {}_{\mathcal{Y}}\mathbf{P}^{-1}\,{}_{\tilde{\mathcal{Y}}}{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\,{}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}}.$$

Důkaz: Nechť E_P resp. E_Q jsou identické operátory na prostorech P resp. Q. Pak $A = E_Q A E_P$. Odtud s využitím předchozí věty plyne

$${}^{\tilde{\mathcal{X}}}A^{\tilde{\mathcal{Y}}} = {}^{\tilde{\mathcal{X}}}(E_Q(AE_P))^{\tilde{\mathcal{Y}}} = {}^{\mathcal{Y}}E_Q{}^{\tilde{\mathcal{Y}}}{}^{\tilde{\mathcal{X}}}(AE_P)^{\mathcal{Y}} = {}_{\tilde{\mathcal{Y}}}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}{}^{\tilde{\mathcal{X}}}E^{\mathcal{X}} = {}_{\mathcal{Y}}P^{-1}\,{}_{\tilde{\mathcal{Y}}}{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\,{}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}}.$$

Q.E.D.

Důsledek 5:

(1) Nechť $A \in \mathcal{L}(P)$, nechť $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}$ jsou báze prostoru P. Potom

$${}^{\tilde{\mathcal{X}}}A = {}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}^{-1}_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot {}^{\mathcal{X}}A \cdot {}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}}.$$

(2) Nechť $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}$ jsou báze V_n, $x \in V_n$. Potom

$${}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}}\lceil x \rceil_{\tilde{\mathcal{X}}} = \lceil x \rceil_{\mathcal{X}}.$$

Důkaz:

(1) Tvrzení plyne z předchozí věty, položíme-li v ní $\mathcal{Y} = \mathcal{X}, \tilde{\mathcal{Y}} = \tilde{\mathcal{X}}$.

(2) Je

$${}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathcal{X}}}\lceil x \rceil_{\tilde{\mathcal{X}}} = {}^{\tilde{\mathcal{X}}}E^{\mathcal{X}}\lceil x \rceil_{\tilde{\mathcal{X}}} = \lceil Ex \rceil_{\mathcal{X}} = \lceil x \rceil_{\mathcal{X}}.$$

Q.E.D.

12. Permutace.

Definice 52: *Nechť $n \in \mathcal{N}$. Každé prosté zobrazení množiny $\hat{n}$ na sebe nazýváme* **permutací množiny** *$\hat{n}$. Množinu všech permutací množiny $\hat{n}$ budeme značit S_n. Permutace budeme značit písmeny řecké abecedy. Je-li tedy $\pi \in S_n$, jsou $\pi(1) \dots \pi(n)$ hodnoty permutace π. Identickou permutaci budeme značit ϵ.*

Poznámka 31: *Ke každé permutaci π existuje inversní permutace π^{-1}.*

Definice 53: *Nechť $n \in \mathcal{N}, i, j \in \hat{n}, i \neq j$. Permutaci $\tau_{ij} \in S_n$, kde*
$\tau_{ij}(k) = i$ *pro* $k = j$
$\tau_{ij}(k) = j$ *pro* $k = i$
$\tau_{ij}(k) = k$ *pro* $k \neq i, j$
nazýváme **transpozicí** *čísel i, j.*

Definice 54: *Nechť $\pi \in S_n$. Každou dvojici $(\pi(i), \pi(j))$ takovou, že $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j), i, j \in \hat{n}$, nazýváme inversí v permutaci π. Číslo $(-1)^{I_\pi}$, kde I_π je počet všech inversí v π, nazýváme* **znaménko** *(***signum***) permutace π, značíme* sgn π. *Je-li* sgn $\pi = +1$ *resp.* -1, *říkáme, že π je permutace* **sudá** *resp.* **lichá**.

Věta 70: *Nechť $\pi \in S_n$, π není identická permutace. Potom existují transposice $\tau_1, \dots, \tau_r \in S_n$ takové, že*

$$\pi = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r.$$

Přitom $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^r$.

Důkaz: Pro $j, r \in \hat{n}$ označme $[j, r]$ tuto permutaci z S_n:
$[j, r](i) = i$ pro $i \neq j, i \neq r$
$[j, r](r) = j$
$[j, r](j) = r$,
tedy $[j, r]$ je transpozice, právě když $j \neq r$, jinak $[j, r] = \epsilon$. Dokážeme neúplnou matematickou indukcí podle k toto tvrzení:
pro každé $k \in \hat{n}$ existují permutace $\tau_1, \dots \tau_k \in S_n$ typu $[j, r]$ takové, že
$(\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1 \pi)(i) = i$ pro každé $i \in \hat{k}$.
Pro $k = 1$ definujme $\tau_1 = [1, \pi(1)]$; potom $(\tau_1 \pi)(1) = 1$. Indukční krok z $1 \leq k < n$ na $k+1 \leq n$: podle indukčního předpokladu existují $\tau_1, \dots, \tau_k$ tak, že $(\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1 \pi)(i) = i$ pro každé $i \in \hat{k}$. Definujme $\tau_{k+1} = [k+1, (\tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1 \pi)(k+1)]$. Je tedy pro $i \in \hat{k}$ $(\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1 \pi)(i) = \tau_{k+1}\Big((\tau_k \dots \tau_1 \pi)(i)\Big) = \tau_{k+1}(i) = i$, protože $(\tau_k \dots \tau_1 \pi)(k+1) \geq k+1$. Pro $i = k+1$ je $(\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1 \pi)(k+1) = \tau_{k+1}\Big((\tau_k \dots \tau_1 \pi)(k+1)\Big) = k+1$. Tedy pro $k = n$ je $\tau_n \dots \tau_1 \pi = \epsilon$, odkud $\pi = \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \dots \tau_n^{-1} = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$. Ta τ_i, která jsou rovna ϵ, vypustíme (všechna to nejsou, protože $\pi \neq \epsilon$) a dostáváme požadovaný rozklad π na traspozice.

Nyní dokážeme, že $sgn \pi = (-1)^r$, kde r je počet transpozic z rozkladu. Nejprve dokážeme toto tvrzení: je-li $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$ transpozice, pak $I_{\tau\sigma} = I_\sigma \pm r_\tau$, kde r_τ je liché číslo. Ale to je zřejmé, protože: je-li $\tau = [\sigma(k), \sigma(k+1)]$ - tzv. sousední transpozice, liší se $I_{\tau\sigma}$, I_σ o 1, je-li $\tau = [\sigma(k), \sigma(j)]$, $1 < j - k < n$, je

$$[\sigma(k), \sigma(j)] = [\sigma(k), \sigma(j-1)] \dots [\sigma(k), \sigma(k+1)][\sigma(j), \sigma(k)] \dots [\sigma(j), \sigma(j-1)],$$

tedy τ je složená z celkem $j-1-k+j-1-k+1 = 2(j-k)+1$ sousedních transpozic a tedy $sgn(\tau\sigma) = -sgn\sigma$. Odtud již plyne tvrzení věty.

Q.E.D.

Důsledek 6: *Nechť* $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. *Potom* $\operatorname{sgn}(\pi_1\pi_2) = \operatorname{sgn}\pi_1 \operatorname{sgn}\pi_2$.

Důkaz: Nechť π_1, π_2 jsou složením následujících transposic: $\pi_1 = \tau_1 \dots \tau_k$, $\pi_2 = \tau_1' \dots \tau_l'$. Potom

$$\operatorname{sgn}(\pi_1\pi_2) = \operatorname{sgn}(\tau_1 \dots \tau_k \tau_1' \dots \tau_l') = (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \operatorname{sgn}\pi_1 \operatorname{sgn}\pi_2.$$

Q.E.D.

13. Determinant

Definice 55: *Nechť V je vektorový prostor nad T, $k \in \mathcal{N}$ a nechť w je zobrazení $V^k \mapsto T$. Říkáme, že w je* **k-lineární forma** *na V právě když*

$$(\forall i \in \hat{k})(\forall \alpha \in T)(\forall x \in V)(\forall y \in V)(\forall (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in V^{k-1})$$
$$(w(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \alpha x + y, a_{i+1}, \ldots, a_k) =$$
$$= \alpha w(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_k) + w(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_k)).$$

Definice 56: *Nechť w je k-lineární forma na V. Říkáme, že w je* **antisymetrická** *právě když $(\forall i, j \in \hat{k}, i < j)(\forall (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k) \in V^k)$ platí*

$$w(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_k) =$$
$$= -w(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_k).$$

Množinu všech antisymetrických k-lineárních forem na V budeme značit $\Lambda_k(V)$.
V množině $\Lambda_k(V)$ definujeme operaci sčítání a násobení číslem.
Nechť $w_1, w_2 \in \Lambda_k(V)$, $(a_1, \ldots, a_k) \in V^k$. Pak součet $w_1 + w_2$ definujeme vztahem

$$(w_1 + w_2)(a_1, \ldots, a_k) = w_1(a_1, \ldots, a_k) + w_2(a_1, \ldots, a_k).$$

Nechť $w \in \Lambda_k(V)$, $\alpha \in T$. Pak součin αw definujeme vztahem

$$(\alpha w)(a_1, \ldots, a_k) = \alpha w(a_1, \ldots, a_k).$$

Poznámka 32: *1-lineární forma ($k = 1$) je lineární funkcionál. Lineární funkcionál je antisymetrická forma, tedy $\Lambda_1(V) = V^{\#}$.*

Věta 71: *Množina $\Lambda_k(V)$ s operacemi zavedenými v předchozí definici je vektorový prostor nad tělesem T.*

Důkaz: Větu snadno dokážeme ověřením definice vektorového prostoru.

Q.E.D.

Věta 72: *Nechť w je k-lineární forma na $V, k > 1$. Potom w je antisymetrická právě když pro každý lineárně závislý soubor vektorů $(x_1, \ldots, x_k)$ z V platí*

$$w(x_1, \ldots, x_k) = 0.$$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Důkaz této implikace provedeme ve 3 krocích:

a) Nechť soubor vektorů $x_1, \ldots, x_k$ obsahuje aspoň 2 vektory, které jsou si rovny, jejich hodnota nechť je a. Pak

$$w(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, \ldots, x_{j-1}, a, \ldots, x_k) = \alpha = -\alpha = 0.$$

b) Nechť soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ je lineárně závislý a $x_1 = \theta$. Pak $w(\theta, \ldots) = 0$.

c) Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je lineárně závislý soubor a $x_1 \neq \theta$. Pak podle věty 4 platí, že $\exists l \in \hat{k}$ takové, že

$$x_l = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j x_j.$$

Potom

$$w(x_1, \ldots, \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j x_j, \ldots, x_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j w(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_j, \ldots, x_k).$$

Protože každý soubor $(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_j, \ldots, x_k)$ obsahuje aspoň 2 stejné vektory, platí $(\forall j \in \widehat{l-1})(w(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_j, \ldots, x_k) = 0)$ a tedy

$$w(x_1, \ldots, x_k) = 0.$$

$\Leftarrow$ Nechť $i, j \in \hat{k}, i < j$. Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V. Pak platí:

$$\begin{aligned} 0 &= w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, \ldots, x_{j-1}, x_i + x_j, \ldots, x_k) = \\ &= w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_i, \ldots, x_k) + \\ &+ w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_k) + \\ &+ w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_{j-1}, x_i, \ldots, x_k) + \\ &+ w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_k). \end{aligned}$$

Protože první a poslední člen je podle předpokladu věty roven nule, platí

$$\begin{aligned} &w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_k) + \\ &+ w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_{j-1}, x_i, \ldots, x_k) = 0, \end{aligned}$$

odkud ihned plyne hledaná rovnost.

Q.E.D.

Věta 73: *Nechť $w \in \Lambda_k(V)$, $\pi \in S_k$, $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z V. Potom*

$$w(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot w(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Důkaz: Pro $\pi = \epsilon$ je tvrzení zřejmé. Je-li π transpozice, vyplývá tvrzení z toho, že w je antisymetrická. Jinak π je složením transposic: $\pi = \tau_1 \ldots \tau_l$. Odtud vyplývá, že

$$w(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(k)}) = (-1)^l w(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Q.E.D.

Věta 74: *Nechť $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je báze V_n. Potom existuje právě jedna n-lineární antisymetrická forma $w \in \Lambda_n(V_n)$ taková, že $w(b_1, \ldots, b_n) = 1$.*

Důkaz:

(1) Jednoznačnost

Nechť $w \in \Lambda_n(V_n), w(b_1, \dots, b_n) = 1$. Zvolme soubor $(x_1, \dots, x_n) \in V_n^n$ libovolně, ale pevně. Pak

$$\begin{aligned} w(x_1, \dots, x_n) &= w(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1}^{\#}(x_1) b_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n}^{\#}(x_n) b_{i_n}) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1}^{\#}(x_1) \dots b_{i_n}^{\#}(x_n) \cdot w(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} b_{\pi(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{\pi(n)}^{\#}(x_n) \cdot w(b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(n)}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} b_{\pi(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{\pi(n)}^{\#}(x_n) \cdot \operatorname{sgn} \pi \cdot w(b_1, \dots, b_n) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot b_{\pi(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{\pi(n)}^{\#}(x_n). \end{aligned}$$

Tím jsme získali jednoznačný vzorec pro formu w za předpokladu, že forma w existuje. Existenci dokážeme v následujícím kroku.

(2) Existence

Definujme zobrazení w vztahem

$$w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot b_{\pi(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{\pi(n)}^{\#}(x_n).$$

Je zřejmé, že w je n-lineární forma na V. Dokážeme, že je antisymetrická. Nechť $i, j \in \hat{n}$, $i < j$. Označme τ transposici čísel i, j. Potom

$$\begin{aligned} & w(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot b_{\pi(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{\pi(i)}^{\#}(x_j) \dots b_{\pi(j)}^{\#}(x_i) \dots b_{\pi(n)}^{\#}(x_n) = \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi\tau) \cdot b_{(\pi\tau)(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{(\pi\tau)(i)}^{\#}(x_i) \dots b_{(\pi\tau)(j)}^{\#}(x_j) \dots b_{(\pi\tau)(n)}^{\#}(x_n) = \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot b_{\sigma(1)}^{\#}(x_1) \dots b_{\sigma(i)}^{\#}(x_i) \dots b_{\sigma(j)}^{\#}(x_j) \dots b_{\sigma(n)}^{\#}(x_n) = \\ &= - w(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Předposlední rovnost vyplývá z toho, že zobrazení, které každé permutaci π přiřadí permutci $\pi\tau$, je prosté zobrazení S_n na S_n. Rovnost $w(b_1, \dots, b_n) = 1$ je zřejmá.

Q.E.D.

Věta 75: *Pro dimenzi prostoru $\Lambda_n(V_n)$ platí*

$$\dim \Lambda_n(V_n) = 1.$$

Důkaz: Větu dokážeme tak, že sestrojíme jednoprvkovou bázi. Nechť $(b_1, \dots, b_n)$ je báze V_n. Nechť $w \in \Lambda_n(V_n)$ taková, že $w(b_1, \dots, b_n) = 1$. Zjistěme, zda w generuje

prostor $\Lambda_n(V_n)$. Nechť $\tilde{w} \in \Lambda_n(V_n)$. Nechť $(x_1, \ldots, x_n) \in V_n^n$. Pak

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x_1, \ldots, x_n) &= \tilde{w}(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1}^{\#}(x_1) b_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_n}^{\#}(x_n) b_{i_n}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} b_{\pi(1)}^{\#}(x_1) \ldots b_{\pi(n)}^{\#}(x_n) \cdot \tilde{w}(b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(n)}) = \\ &= \tilde{w}(b_1, \ldots, b_n) \cdot w(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= (\tilde{w}(b_1, \ldots, b_n) \cdot w)(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

tedy

$$\tilde{w} = \tilde{w}(b_1, \ldots, b_n) \cdot w.$$

Q.E.D.

Věta 76: *Nechť $w \in \Lambda_n(V_n), w \neq \theta, (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Potom*

$$w(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Důkaz: Nechť $\tilde{w} \in \Lambda_n(V_n)$ taková, že $\tilde{w}(x_1, \ldots, x_n) = 1$, (w) je báze $\Lambda_n(V_n)$. Pak existuje $\alpha \in T$, $\alpha \neq 0$, takové, že $\tilde{w} = \alpha w$. Potom platí

$$1 = \tilde{w}(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha w)(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot w(x_1, \ldots, x_n),$$

tedy

$$w(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Q.E.D.

Lemma 3: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_1)$. Potom existuje právě 1 číslo $\alpha \in T$ takové, že $\forall x \in V_1$ platí $Ax = \alpha x$.*

Důkaz:

1) Existence
   Nechť (x_0) je báze V_1. Definujme α vztahem $Ax_0 = \alpha x_0$. Nechť $x \in V_1$, $x = \beta x_0$. Pak

$$\begin{aligned}Ax = A(\beta x_0) = \beta A x_0 = \beta(\alpha x_0) = \\ = \alpha(\beta x_0) = \alpha x,\end{aligned}$$

   tedy $(\forall x \in V_1)(Ax = \alpha x)$.
2) Jednoznačnost
   Nechť $\alpha_1 \neq \alpha_2$ a nechť $\forall x \in V_1$ platí $Ax = \alpha_1 x = \alpha_2 x$. Pak $\forall x \in V_1$ platí $(\alpha_1 - \alpha_2)x = \theta$. Položíme-li $x = x_0$, dostaneme $(\alpha_1 - \alpha_2)x_0 = \theta$, odtud $\alpha_1 = \alpha_2$ (neboť (x_0) je báze V_1), což je spor.

Q.E.D.

Věta 77: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n je vektorový prostor nad T. Potom existuje právě jedno číslo $\alpha \in T$ takové, že pro každou n-lineární antisymetrickou formu $w \in \Lambda_n(V_n)$ a pro každý soubor $(x_1, \ldots, x_n)$ vektorů z V_n platí:*

$$w(Ax_1, \ldots, Ax_n) = \alpha \cdot w(x_1, \ldots, x_n).$$

Důkaz: Nechť $\tilde{A}$ je zobrazení $\Lambda_n(V_n) \mapsto \Lambda_n(V_n)$, které vektoru $w \in \Lambda_n(V_n)$ přiřazuje vektor $\tilde{A}w$ vztahem

$$(\tilde{A}w)(x_1, \dots, x_n) = w(Ax_1, \dots, Ax_n).$$

Snadno ověříme, že $\tilde{A}w \in \Lambda_n(V_n)$. Ukažme, že $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\Lambda_n(V_n))$.
Nechť $w_1, w_2 \in \Lambda_n(V_n), \beta \in T$. Pak $\forall x_1, \dots, x_n \in V_n$ platí

$$\begin{aligned}[\tilde{A}(\beta w_1 + w_2)](x_1, \dots, x_n) &= (\beta w_1 + w_2)(Ax_1, \dots, Ax_n) = \\ &= \beta(\tilde{A}w_1)(x_1, \dots, x_n) + (\tilde{A}w_2)(x_1, \dots, x_n) = \\ &= (\beta\tilde{A}w_1 + \tilde{A}w_2)(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Podle předchozího lemmatu 3

$$(\exists_1 \alpha \in T)(\forall w \in \Lambda_n(V_n))(\forall (x_1, \dots, x_n) \in V_n^n)((\tilde{A}w)(x_1, \dots, x_n) = (\alpha w)(x_1, \dots, x_n)).$$

Q.E.D.

Definice 57: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T, nechť $\alpha \in T$ je takové, že $\forall w \in \Lambda_n(V_n)$ a každý n-členný soubor $(x_1, \dots, x_n)$ z V_n^n platí:*

$$w(Ax_1, \dots, Ax_n) = \alpha w(x_1, \dots, x_n).$$

Číslo α nazýváme **determinantem** *operátoru A.*

Označení: *Determinant operátoru A značíme* $\det A$ *nebo* $|A|$.

Věta 78: *Nechť A je lineární operátor na V_n, nechť $(b_1, \dots, b_n)$ je báze V_n, nechť $w \in \Lambda_n(V_n)$ taková, že $w(b_1, \dots, b_n) = 1$. Potom*

$$\det A = w(Ab_1, \dots, Ab_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi b^{\#}_{\pi(1)}(Ab_1) \dots b^{\#}_{\pi_n}(Ab_n).$$

Důkaz: Věta plyne z předchozí definice a důkazu věty 74.

Q.E.D.

Poznámka 33: *Nechť $\mathcal{B}$ je báze V_n, ${}^{\mathcal{B}}A = (\alpha_{ij})$. Pak*

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \alpha_{\pi(1)1} \dots \alpha_{\pi(n)n}.$$

Věta 79: *Nechť $A, B, E \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak platí:*

1) $\det E = 1$.
2) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
3) *A je regulární* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Důkaz: Nechť $(b_1, \dots, b_n)$ je báze V_n. Zvolme n-lineární antisymetrickou formu w tak, aby $w(b_1, \dots, b_n) = 1$.

1) $\det \mathbf{E} = w(\mathbf{E}b_1, \dots, \mathbf{E}b_n) = w(b_1 \dots, b_n) = 1$.
2)

$$\begin{aligned}\det(AB) &= w((AB)b_1, \dots, (AB)b_n) = w(A(Bb_1), \dots, A(Bb_n)) = \\ &= \det A \cdot w(Bb_1, \dots, Bb_n) = \det A \cdot \det B.\end{aligned}$$

3) Nechť A je regulární. Pak soubor $(Ab_1, \dots, Ab_n)$ je lineárně nezávislý a tvoří bázi prostoru V_n. Podle věty 76 platí $w(Ab_1, \dots, Ab_n) \neq 0$.
Nechť $\det A \neq 0$. Pak $w(Ab_1, \dots, Ab_n) \neq 0$, tedy $(Ab_1, \dots, Ab_n)$ je lineárně nezávislý a tedy tvoří bázi V_n. Tedy A je epimorfní na prostoru konečné dimenze, a proto je regulární.

Q.E.D.

Důsledek 7: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, A je regulární. Pak*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Důkaz: $AA^{-1} = E$, tedy $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

Q.E.D.

Definice 58: *Nechť $\mathbf{A} \in T^{n,n}$ a nechť $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$. Číslo*

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \alpha_{\pi(1)1} \cdots \alpha_{\pi(n)n}$$

nazýváme **determinantem** *matice* $\mathbf{A}$ *a značíme jej* $\det \mathbf{A}$ *resp.* $|\mathbf{A}|$.

Poznámka 34: *Determinant lineárního operátoru je roven determinantu matice operátoru v jakékoliv bázi.*

Věta 80: *Determinant jako funkce sloupců je n-lineární antisymetrická forma na prostoru $T^{n,1}$.*

Důkaz: Proveďte jako cvičení.

Q.E.D.

Věta 81: *Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E} \in T^{n,n}$. Potom*

1) $\det \mathbf{E} = 1$.

2) $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

3) $\mathbf{A}$ *je regulární* $\Leftrightarrow$ $\det \mathbf{A} \neq 0$.

4) $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ *($\mathbf{A}^T$ je matice transponovaná).*

Důkaz:

1) Tvrzení vyplývá z definice.

2) Definujme operátory $A, B \in \mathcal{L}(T^n)$ tak, aby platilo ${}^{\mathcal{E}}A = \mathbf{A}$, ${}^{\mathcal{E}}B = \mathbf{B}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det {}^{\mathcal{E}}A \cdot \det {}^{\mathcal{E}}B = \\ &= \det {}^{\mathcal{E}}(AB) = \det AB = \det A \cdot \det B = \\ &= \det {}^{\mathcal{E}}A \det {}^{\mathcal{E}}B = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

3) $\mathbf{A}$ je regulární $\Leftrightarrow$ A je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0$.

4) Z definice determinantu dostáváme:

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha'_{\pi(1)1} \cdots \alpha'_{\pi(n)n} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} \cdot \alpha_{\pi^{-1}(1)1} \cdots \alpha_{\pi^{-1}(n)n} = \det A. \end{aligned}$$

Poslední rovnost vyplývá ze skutečnosti, že zobrazení, které permutaci $\pi \in S_n$ přiřadí permutaci π^{-1}, je prosté zobrazení množiny S_n na S_n.

Q.E.D.

Důsledek 8: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{n,n}$ *je regulární. Potom*

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Definice 59: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, $k, l \in \hat{n}$. *Nechť* $\mathbf{A}(k,l)$ *je matice z prostoru* $T^{n-1,n-1}$, *která vznikne z* $\mathbf{A}$ *vynecháním k-tého řádku a l-tého sloupce. Číslo* $(-1)^{k+l} \cdot \det \mathbf{A}(k,l)$ *nazýváme* **algebraický doplněk** *prvku* α_{kl}.

Lemma 4: *Nechť* $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, $\mathbf{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, k, $l \in \hat{n}$ *a* $\forall i \in \hat{n} - \{k\}$ *platí* $\alpha_{il} = 0$. *Potom*

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{k+l} \cdot \alpha_{kl} \cdot \det \mathbf{A}(k,l).$$

Důkaz:

1) Nechť $k = l = n$. Potom

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \alpha_{\pi(1)1} \cdots \alpha_{\pi(n)n}.$$

Na pravé straně poslední rovnosti jsou nulové všechny sčítance, pro které je $\pi(n) \neq n$. Tedy

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n, \pi(n)=n} \operatorname{sgn} \pi \alpha_{\pi(1)1} \cdots \alpha_{\pi(n)n} =$$

$$= \alpha_{n,n} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \alpha_{\pi(1)1} \cdots \alpha_{\pi(n-1)n-1} =$$

$$= \alpha_{n,n} \det \mathbf{A}(n,n).$$

2) Nechť neplatí podmínka 1). Tento případ převedeme na případ 1). Nechť matice $\tilde{\mathbf{A}}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že l-tý sloupec přesuneme na n-tou posici postupným vyměňováním s následujícím sloupcem, potom stejným způsobem přemístíme k-tý řádek na n-tou posici. Provedeme tedy celkem $(n-l)+(n-k)$ výměn. Proto

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = (-1)^{2n-l-k} \det \mathbf{A}.$$

Zároveň podle 1) platí

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \alpha_{kl} \cdot \det \tilde{\mathbf{A}}(n,n) = \alpha_{kl} \det \mathbf{A}(k,l).$$

Platí tedy

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{k+l} \alpha_{kl} \cdot \det \mathbf{A}(k,l).$$

Q.E.D.

Věta 82 (věta o rozvoji determinantu podle k-tého sloupce): *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, *nechť* $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, $k \in \hat{n}$. *Potom platí:*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{ik} \det \mathbf{A}(i,k).$$

Důkaz: Definujme matici ${}^i\mathbf{A}^k$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ úpravou k-tého sloupce tak, že v k-tém sloupci je na i-tém místě α_{ik}, jinak nuly. Ostatní sloupce jsou nezměněny. K-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ je tedy součtem všech k-tých sloupců matic ${}^i\mathbf{A}^k$, $i \in \hat{n}$. Z linearity determinantu vzhledem k sloupcům matice a z předchozího lemmatu 4 plyne

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \det {}^i\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(-1)^{k+i} \det {}^i\mathbf{A}^k(i,k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}(-1)^{k+i} \det \mathbf{A}(i,k).$$

Q.E.D.

Věta 83 (Cramerovo pravidlo): *Nechť $\mathbf{A} \in T^{n,n}$ je regulární, nechť $b \in T^{n,1}$. Potom soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}x = b$ má právě 1 řešení*

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Přitom platí:

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\det \mathbf{A}},$$

kde Δ_i je determinant matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem b.

Důkaz: Pro vektor x musí platit

$$\xi_1 \cdot \mathbf{A}_{\cdot 1} + \xi_2 \cdot \mathbf{A}_{\cdot 2} + \ldots + \xi_n \cdot \mathbf{A}_{\cdot n} = b.$$

Zvolme $i \in \hat{n}$ libovolně, ale pevně. Pak

$$\xi_1 \cdot \mathbf{A}_{\cdot 1} + \xi_2 \cdot \mathbf{A}_{\cdot 2} + \ldots + 1 \cdot (\xi_i \cdot \mathbf{A}_{\cdot i} - b) + \ldots + \xi_n \cdot \mathbf{A}_{\cdot n} = \theta.$$

Tedy matice $\mathbf{B}_i = (\mathbf{A}_{\cdot 1}, \ldots, \xi_i \mathbf{A}_{\cdot i} - b, \ldots, \mathbf{A}_{\cdot n})$ není regulární, neboť jsme našli netriviální kombinaci jejích sloupců, dávající nulový vektor. Platí tedy

$$0 = \det \mathbf{B}_i = \xi_i \det \mathbf{A} - \Delta_i,$$

odkud plyne tvrzení věty.

Q.E.D.

Definice 60: *Nechť $\mathbf{A}$ je matice z $T^{n,n}$, $n \geq 2$. Matici $\mathbf{A}^{adj} \in T^{n,n}$, kde $\mathbf{A}^{adj}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{A}(j,i)$, nazýváme maticí* **adjungovanou** *k matici $\mathbf{A}$.*

Věta 84: *Nechť $\mathbf{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$. Potom platí:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{adj} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}.$$

Důkaz: Nechť $i, j \in \hat{n}$. Potom

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{adj})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{A}^{adj}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{ik} \cdot (-1)^{k+j} \det \mathbf{A}(j,k) = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Poslední rovnost pro $i \neq j$ vyplývá z toho, že výraz

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{ik} \cdot (-1)^{k+j} \det \mathbf{A}(j,k)$$

je roven determinantu matice, v níž jsou dva řádky stejné.

Q.E.D.

Důsledek 9: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{n,n}$, $n \geq 2$, *je regulární. Potom*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{adj}.$$

Důkaz: Tvrzení vyplývá z tvrzení předchozí věty, dělíme-li obě strany rovnice číslem $\det \mathbf{A}$.

Q.E.D.

Definice 61: *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{m,n}$. *Říkáme, že* $\mathbf{B} \in T^{r,s}$ *je* **submaticí** *matice* $\mathbf{A}$, *jestliže platí:*

1) $r \in \hat{m}$, $s \in \hat{n}$

2) $\exists i_1, \ldots, i_r \in \hat{m}$, $j_1, \ldots, j_s \in \hat{n}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq n$ *takové, že* $(\forall k = 1, \ldots, r,\ l = 1, \ldots, s)(\mathbf{B}_{kl} = \mathbf{A}_{i_k j_l})$.

Submatice tedy vznikne z matice vynecháním některých jejích řádků a sloupců. Submatici značíme:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_r \\ j_1, \ldots, j_s \end{pmatrix}.$$

Determinant čtvercové submatice r*-tého řádu nazýváme subdeterminantem matice* $\mathbf{A}$ r*-tého řádu.*

Věta 85 (o hodnosti matice): *Nechť* $\mathbf{A} \in T^{m,n}$, $k \in N$. *Matice* $\mathbf{A}$ *má hodnost* k *právě tehdy, když existuje nenulový subdeterminant této matice* k*-tého řádu a všechny subdeterminanty řádu vyššího než* k *jsou nulové.*

Důkaz: $\Rightarrow$

Je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = k$, existují indexy $i_1, \ldots, i_k \in \hat{m}$, $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m)$ takové, že řádky matice $\mathbf{A}$ s těmito indexy jsou lineárně nezávislé, tedy

$$\mathrm{h}\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix}\right) = k.$$

V této submatici musí existovat k lineárně nezávislých sloupců, jejich indexy označme $j_1, \ldots, j_k$ $(1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n)$. Tedy submatice

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix}$$

má lineárně nezávislé sloupce, je tedy regulární a její determinant je různý od 0. Je-li $k = \min\{m, n\}$, druhé tvrzení platí. Nechť tedy $k < \min\{m, n\}$, $k < q \leq \min\{m, n\}$ a zvolme libovolně indexy $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leq m$, $1 \leq j_1 < i_2 < \ldots < j_q \leq n$. Dokážeme, že

$$\det \mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_q \\ j_1, \ldots, j_q \end{pmatrix} = 0.$$

Platí

$$\mathrm{h}\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_q \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix}\right) \leq k < q,$$

tedy každých q sloupců této matice je lineárně závislých, tedy i sloupce o indexech $j_1, \ldots, j_q$. Proto matice

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_q \\ j_1, \ldots, j_q \end{pmatrix}$$

je singulární a její determinant je nula.

$\Leftarrow$

Nechť

$$\det \mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Platí, že

$$\mathrm{h}\left(\mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ 1, \ldots, n \end{pmatrix}\right) = k,$$

neboť kdyby tato hodnost byla menší než k, byly by podle již dokázané implikace všechny její subdeterminanty k-tého řádu rovny nule, ale

$$\det \mathbf{A}\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A}) \geq k$. Ale $\mathrm{h}(\mathbf{A}) > k$ být nemůže, neboť by musel existovat subdeterminant matice A řádu většího než k různý od nuly. Tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = k$.

Q.E.D.

14. Vlastní čísla a vektory. Diagonalizace.

Definice 62: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, P je podprostor V. Říkáme, že P je* **invariantní podprostor vzhledem k operátoru** *A právě když $A(P) \subset P$.*

Definice 63: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, V nad T, $\lambda \in T$. Říkáme, že λ je* **vlastním (charakteristickým) číslem operátoru** *A právě když existuje $x \in V$, $x \neq \theta$, takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme* **vlastním (charakteristickým) vektorem operátoru** *A příslušejícím vlastnímu číslu λ. Množinu všech vlastních čísel nazýváme* **spektrem** *operátoru A. Spektrum operátoru A značíme $\sigma(A)$.*

Poznámka 35: *Pro vlastní číslo λ operátoru A a vlastní vektor x příslušející vlastnímu číslu λ platí:*

$$Ax = \lambda x,$$

$$Ax - \lambda x = \theta \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = \theta.$$

Množina vlastních vektorů operátoru A příslušejících vlastnímu číslu λ je tedy (po přidání nulového vektoru) jádrem operátoru $A - \lambda E$. Odtud ihned plyne následující věta.

Věta 86: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda \in \sigma(A)$. Množina všech vlastních vektorů operátoru A příslušejících vlastnímu číslu λ tvoří (po přidání nulového vektoru) podprostor prostoru V invariantní vzhledem k A.*

Věta 87: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla operátoru A, x_i je vlastní vektor operátoru A příslušející vlastnímu číslu λ_i, $(i = 1, \ldots, k)$. Potom $(x_1, \ldots, x_k)$ je lineárně nezávislý soubor vektorů.*

Důkaz: Pro $k = 1$ je tvrzení triviální. Uvažujme $k \geq 2$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ je lineárně závislý.
Potom $(\exists l \in \hat{k})(l \geq 2)(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1})$ taková, že platí

$$x_l = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j x_j \tag{1}$$

a zároveň soubor $(x_1, \ldots, x_{l-1})$ je lineárně nezávislý. Pak platí:

$$Ax_l = A \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j A x_j = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j \lambda_j x_j. \tag{2}$$

Současně z (1) plyne

$$Ax_l = \lambda_l x_l = \sum_{j=1}^{l-1} \lambda_l \alpha_j x_j. \tag{3}$$

Z (2) a (3) tedy dostáváme:

$$\theta = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_l) x_j.$$

To je spor, neboť jsme našli nulovou netriviální lineární kombinaci vektorů $(x_1, \ldots, x_{l-1})$, které byly podle předpokladů lineárně nezávislé.

Q.E.D.

Věta 88: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Determinant operátoru $(A - \lambda E)$ jakožto funkce proměnné λ je polynom stupně právě n.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n, ${}^{\mathcal{X}}A = (\alpha_{ij})$, $\lambda \in T$. Pak

$$\det(A - \lambda E) = \det {}^{\mathcal{X}}(A - \lambda E) = \det({}^{\mathcal{X}}A - \lambda \mathbf{E}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Z definice determinantu matice plyne tvrzení věty - koeficient u λ^n je $(-1)^n$.

Q.E.D.

Definice 64: *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom $\det(A - \lambda E)$ nazýváme* **charakteristickým polynomem** *operátoru A, značíme p_A. Rovnici $p_A(\lambda) = 0$ nazýváme charakteristickou rovnicí operátoru A.*

Věta 89: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad T. Potom*

$$\sigma(A) = T \cap p_A^{-1}(0).$$

Důkaz:

1) $\subset$: Nechť $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Pak $(\exists\, x \in V_n)(x \neq \theta)(Ax = \lambda_0 x)$. Tedy $Ax - \lambda_0 x = \theta \Rightarrow (A - \lambda_0 E)x = \theta \Rightarrow x \in (A - \lambda_0 E)^{-1}(\theta) \Rightarrow A - \lambda_0 E$ není monomorfní $\Rightarrow A - \lambda_0 E$ není regulární $\Rightarrow \det(A - \lambda_0 E) = 0 \Rightarrow p_A(\lambda_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 \in p_A^{-1}(0)$.
2) $\supset$: Nechť $\lambda_0 \in T \cap p_A^{-1}(0) \Rightarrow \det(A - \lambda_0 E) = 0 \Rightarrow A - \lambda_0 E$ není regulární $\Rightarrow A - \lambda_0 E$ není monomorfní $\Rightarrow (\exists x \in V_n)(x \neq \theta)((A - \lambda_0 E)x = \theta) \Rightarrow Ax = \lambda_0 x \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma(A)$.

Q.E.D.

Věta 90: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, V_n nad $\mathcal{C}$. Potom*

1) $\sigma(A) \neq \emptyset$,
2) $\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$.

Důkaz:

1) Tvrzení vyplývá ze základní věty algebry.
2) $\sigma(A) = \mathcal{C} \cap p_A^{-1}(0) = p_A^{-1}(0)$.

Q.E.D.

Definice 65: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n), \lambda_0 \in \sigma(A)$. Násobnost čísla λ_0 jakožto kořene charakteristické rovnice operátoru A nazýváme* **algebraickou násobností** *čísla λ_0, značíme $\nu_a(\lambda_0)$.*
Číslo $\mathrm{d}(A - \lambda_0 E)$ nazýváme **geomertrickou násobností** *čísla λ_0, značíme $\nu_g(\lambda_0)$ ($\nu_g(\lambda_0)$ je počet lineárně nezávislých vlastních vektorů k λ_0).*

Věta 91: *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Potom*

$$\nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0).$$

Důkaz: Označme $\nu_g(\lambda_0) = k$ (tedy $k \geq 1$). Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je báze $(A - \lambda_0 E)^{-1}(\theta)$. Doplňme soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ na bázi prostoru V_n.
Nechť tedy $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Potom platí

$$
{}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & \alpha_{2k+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & \alpha_{kk+1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nk+1} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix},
$$

$$
p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det({}^{\mathcal{X}}A - \lambda \mathbf{E}) =
$$

$$
= \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \ldots & 0 & \alpha_{2k+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{kk+1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nk+1} & \ldots & \alpha_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot q(\lambda).
$$

Poslední rovnost je ekvivalentní s tvrzením, že λ_0 je aspoň k-násobný kořen polynomu p_A.

Q.E.D.

Definice 66: *Matici* $\mathbf{A} \in T^{n,n}$, $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, *kde* $\alpha_{ij} = 0, \forall i, j \in \hat{n}, i \neq j$, *nazýváme maticí* **diagonální**. *Říkáme, že* $A \in \mathcal{L}(V_n)$ *je* **diagonalizovatelný**, *jestliže existuje báze* $\mathcal{X}$ *prostoru* V_n *taková, že* ${}^{\mathcal{X}}A$ *je diagonální. Bázi* $\mathcal{X}$ *nazýváme* **diagonální bází** *operátoru* A.

Věta 92: *Nechť* $A \in \mathcal{L}(V_n)$. *Pak* A *je diagonizovatelný právě když platí:*
1) $p_A^{-1}(0) \subset T$,
2) $\nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0)$, $\forall \lambda_0 \in \sigma(A)$.

Důkaz: $\Rightarrow$:
Nechť $\mathcal{X}$ je diagonální báze operátoru A, tedy

$$
{}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.
$$

1) Pro charakteristický polynom platí:

$$
p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \Pi_{j=1}^{n}(\alpha_j - \lambda),
$$

tedy

$$
p_A^{-1}(0) = \{\alpha_j | j \in \hat{n}\}.
$$

Odtud ihned plyne, že $p_A^{-1}(0) \subset T$.

2) Nechť $\nu_a(\lambda_0) = k, \lambda_0 \in \sigma(A)$. Pak

$$(\exists i_1, \ldots, i_k)(\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_k} = \lambda_0).$$

Pro geometrickou násobnost platí podle 2. věty o dimenzi

$$\nu_g(\lambda_0) = \mathrm{d}(A - \lambda_0 E) = n - \mathrm{h}(A - \lambda_0 E) = n - \mathrm{h}({}^{\mathcal{X}}A - \lambda_0 \mathbf{E}).$$

V matici $({}^{\mathcal{X}}A - \lambda_0 \mathbf{E})$ jsou na k místech na diagonále nuly, ostatní prvky jsou nenulové, hodnost této matice je tedy $(n-k)$ a $\nu_g(\lambda_0) = k$.

$\Leftarrow$ Důkaz provedeme konstruktivně.
Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou navzájem různá vlastní čísla operátoru A. Označme jejich násobnosti $l_1, \ldots, l_k$. Pak

$$\sum_{j=1}^{k} l_j = n.$$

Nechť $(x_1^{(i)}, \ldots, x_{l_i}^{(i)})$ jsou vlastní vektory příslušející číslu $\lambda_i, i \in \hat{k}$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Sestavme ze všech těchto vektorů soubor

$$\mathcal{X} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{l_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{l_2}^{(2)}, \ldots, x_{l_k}^{(k)}).$$

Ověřme, že tento soubor tvoří bázi prostoru V_n. Nechť

$$\sum_{j=1}^{l_1} \alpha_j^{(1)} x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{l_2} \alpha_j^{(2)} x_j^{(2)} + \ldots + \sum_{j=1}^{l_k} \alpha_j^{(k)} x_j^{(k)} = \theta.$$

Všimněme si, že každá ze sum v předchozí rovnici představuje vlastní vektor příslušející jednomu vlastnímu číslu (neboť je lineární kombinací vlastních vektorů příslušejících jednomu vlastnímu číslu) nebo nulový vektor. Předpokládejme, že aspoň jedna ze sum je nenulová. Pak ale rovnice představuje nulovou netriviální kombinaci vlastních vektorů příslušejících různým vlastním číslům. To je ovšem spor s větou 87. Tedy všechny sumy musí být rovny nulovému vektoru. Odtud ovšem plyne, že všechny koeficienty ve všech sumách jsou nulové, neboť vektory v každé sumě jsou lineárně nezávislé. Dokázali jsme tedy, že sestavený soubor vektorů $\mathcal{X}$ je lineárně nezávislý a protože je n-členný, tvoří bázi prostoru V_n. Z konstrukce souboru je navíc zřejmé, že matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je diagonální. Tedy A je diagonizovatelný.

Q.E.D.

Věta 93 (Hamiltonova - Caleyho věta): *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom $p_A(A) = \Theta$. (Tedy každý lineární operátor je kořenem svého charakteristického polynomu).*

Důkaz: Nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n, $p_A(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda^j$. Pak

$${}^{\mathcal{X}}(p_A(A)) = {}^{\mathcal{X}}(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j A^j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j ({}^{\mathcal{X}}A)^j = p_A({}^{\mathcal{X}}A).$$

Dokažme, že

$$p_A({}^{\mathcal{X}}A) = \theta.$$

Označme $\mathbf{A} = {}^{\mathcal{X}}A$. Pak podle věty 84 platí

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{adj} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}.$$

Z definice adjungované matice plyne, že matici adjungovanou k $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ můžeme vyjádřit jako "polynom" stupně $n-1$ proměnné λ s maticovými koeficienty.

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{adj} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}_j \lambda^j.$$

Tedy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{C}_j \lambda^j = p_A(\lambda)\mathbf{E} = \alpha_0\mathbf{E} + \alpha_1\lambda\mathbf{E} + \alpha_2\lambda^2\mathbf{E} + \ldots + \alpha_n\lambda^n\mathbf{E}.$$

Pravou i levou stranu poslední rovnice si můžeme představit jako "kvazipolynom" s maticemi jako koeficienty. Porovnejme koeficienty u stejných mocnin na obou stranách poslední rovnice (musí být stejné - proč?). Dostaneme

$$\begin{aligned} -\mathbf{C}_{n-1} &= \alpha_n\mathbf{E}, \\ \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2} &= \alpha_{n-1}\mathbf{E}, \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0 &= \alpha_1\mathbf{E}, \\ \mathbf{A}\mathbf{C}_0 &= \alpha_0\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici maticí $\mathbf{A}$ zleva a přičtěme ji k druhé rovnici. Získanou rovnici opět vynásobme maticí $\mathbf{A}$ zleva a přičtěme ji ke třetí rovnici atd. Tímto postupem dostaneme

$$\theta = \alpha_0\mathbf{E} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{A}^n,$$

což je tvrzení věty.

Q.E.D.

Poznámka 36: *Pro matice se dá definovat vlastní číslo α a vlastní vektor x (sloupcový vektor) stejně jako pro operátory.*

15. Hermitovské a kvadratické formy

Definice 67: *Nechť V je vektorový prostor nad T, h je zobrazení $V \times V \mapsto T$. Říkáme, že h je* **hermitovská forma** *na V právě když*

1) $(\forall x \in V)(\forall y \in V)(\forall \alpha \in T)(\forall z \in V)(h(\alpha x + y, z) = \alpha h(x, z) + h(y, z))$,

2) $(\forall x \in V)(\forall y \in V)(h(x, y) = \overline{h(y, x)})$.

Zobrazení Q definované na V předpisem $Q(x) = h(x, x)$, $\forall x \in V$ nazýváme **diagonálou hermitovské formy** *h.*

Poznámka 37:

(1) Diagonála Q hermitovské formy h je zobrazení $V \mapsto \mathcal{R}$ (i když V je vektorovým prostorem nad C). Důvodem je, že $Q(x) = h(x, x) = \overline{h(x, x)}$.

(2) $h(x, \alpha y + z) = \overline{h(\alpha y + z, x)} = \overline{\alpha h(y, x) + h(z, x)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{h(y, x)} + \overline{h(z, x)} = \overline{\alpha} \cdot h(x, y) + h(x, z)$.

Věta 94: *Nechť h je hermitovská forma na V, Q její diagonála. Pak platí*

1) $Q(\alpha x) = |\alpha|^2 \cdot Q(x)$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in T$,

2) $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2\mathrm{Re}\, h(x, y)$, $\forall x, y \in V$,

3) $Q(x + y) + Q(x - y) = 2(Q(x) + Q(y))$, $\forall x, y \in V$ *(rovnoběžníková rovnost),*

4 a) $h(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x + y) - Q(x - y))$, $\forall x, y \in V$, $T = \mathcal{R}$

4 b) $h(x, y) = \frac{1}{4}[Q(x + y) - Q(x - y) + \mathrm{i}(Q(x + \mathrm{i}y) - Q(x - \mathrm{i}y))]$, $\forall x, y \in V$, $T = \mathcal{C}$ *(polarizační itentity).*

Důkaz:

1) $Q(\alpha x) = h(\alpha x, \alpha x) = \alpha \overline{\alpha} h(x, x) = |\alpha|^2 Q(x)$.

2) $Q(x + y) = h(x + y, x + y) = h(x, x) + h(x, y) + h(y, x) + h(y, y) =$
$= Q(x) + Q(y) + 2\mathrm{Re}\, h(x, y)$.

3) Podle 2) platí $Q(x - y) = Q(x) + Q(-y) + 2\mathrm{Re}\, h(x, -y) = Q(x) + Q(y) - 2\mathrm{Re}\, h(x, y)$.

4 a) Podle důkazu 2) a 3) platí $Q(x + y) - Q(x - y) = 4\mathrm{Re}\, h(x, y) = 4h(x, y)$.

4 b) Je-li $T = \mathcal{C}$, platí $h(x, y) = \mathrm{Re}\, h(x, y) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}\, h(x, y)$. Protože $\mathrm{Im}\, h(x, y) = \mathrm{Re}\, h(x, \mathrm{i}y)$, dostáváme s využitím 4 a) tvrzení věty.

Q.E.D.

Lemma 5: *Nechť h je hermitovská forma na V, $N_h = \{x \in V | (\forall y \in V)(h(x, y) = 0)\}$. Potom N_h je podprostorem V.*

Důkaz:

1) $N_h \neq \emptyset$, neboť $(\forall y \in V)(h(\theta, y) = 0)$, tedy $\theta \in N_h$.

2) Nechť $y, z \in N_h$. Pak $h(\alpha y + z, u) = \alpha \cdot h(y, u) + h(z, u) = 0$, tedy $\alpha y + z \in N_h$

Q.E.D.

Definice 68: *Nechť h je hermitovská forma na V. Podprostor $N_h = \{x \in V | (\forall y \in V)(h(x, y) = 0)\}$ nazýváme* **nulovým prostorem** *hermitovské formy h (nulprostorem hermitovské formy h). Jeho dimenzi nazýváme* **nulita** *hermitovské formy h, značíme $\nu(h)$. Říkáme, že hermitovská forma h je* **regulární** *(resp.* **singulární***), jestliže její nulita je rovna nule (resp. větší než nula).*

Poznámka 38: *Uvažujme vektorový prostor V_n s bází $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, nechť h je hermitovská forma na V_n, $x, y \in V_n$. Nechť $x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^n \eta_i x_i$. Potom*

$$h(x, y) = h(\sum_{i=1}^n \xi_i x_i, \sum_{i=1}^n \eta_i x_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \overline{\eta_j} h(x_i, x_j),$$

$$Q(x) = h(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi_j} h(x_i, x_j).$$

V dalším budeme hledat jednodušší vyjádření formy h. Kdyby se nám podařilo najít bázi $\mathcal{X}$ takovou, že $(\forall i, j,\ i \neq j)(h(x_i, x_j) = 0)$, pak by platilo

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} Q(x_i),$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 Q(x_i) \quad (\textit{tzv. kanonický tvar})$$

Definice 69: *Nechť h je hermitovská forma na V_n. Bázi $(a_1, \ldots, a_n)$ nazýváme* **polární bází** *hermitovské formy h, jestliže $(\forall i, j \in \hat{n},\ i \neq j)(h(a_i, a_j) = 0)$.*

Věta 95: *Každá hermitovská forma na V_n má polární bázi.*

Důkaz: Důkaz provedeme neúplnou indukcí podle $codim\, N_h = m$ $(0 \leq m \leq n)$.

Je-li $m = 0$, je $N_h = V_n$ a tedy $h(x,y) = 0$ pro každé $x, y \in V_n$. Polární bází je každá báze V_n.

Nechť tedy $0 \leq m < n$ a proveďme indukční krok z m na $m+1$. Protože $codim\, N_h = m + 1 \geq 1$, musí existovat vektory $x, y \in V_n$ takové, že $h(x,y) \neq 0$. Podle polarizačních identit je v případě $T = R$ alespoň jedno z čísel $Q(x+y), Q(x-y)$ nenulové, v případě $T = C$ je alespoň jedno z čísel $Q(x+y), Q(x-y), Q(x+iy), Q(x-iy)$ nenulové, tedy vždy existuje vektor $a \in V_n$ $(a \neq \theta)$ takový, že $Q(a) \neq 0$. Definujme zobrazení $\varphi : V_n \mapsto T$ takto: $\varphi(x) = h(x,a)$. Zřejmě $\varphi \in {V_n}^{\#}$, $\varphi \neq \Theta$ $(\varphi(a) = Q(a) \neq 0)$. Označme $L = ker\, \varphi$; je $dim\, L = n - 1$. Dále platí: $N_h \subset L$ (pro $x \in N_h$ je $h(x,a) = \varphi(x) = 0$), $codim_L N_h = m$. Označme h_L zúžení zobrazení h na $L \times L$. Je h_L hermitovská forma na L a platí $N_{h_L} = N_h$, neboť: je-li $x \in N_h$, je $h(x,y) = 0$ pro každé $y \in V_n$ a tedy i pro každé $y \in L$, odkud $x \in N_{h_L}$. Naopak, je-li $x \in N_{h_L}$, $y \in V_n$, je $y = z + \lambda a$, $z \in L, \lambda \in T$ (protože $V_n = L \oplus [a]_\lambda$) a tedy $h(x,y) = h(x,z) + \overline{\lambda}\, h(x,a) = h_L(x,z) + \overline{\lambda}\varphi(x) = 0$. Odtud plyne, že $x \in N_h$.

Podle indukčního předpokladu má h_L v L polární bázi $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Položme $a_n = a$. Pak $(a_1, \ldots, a_n)$ je báze V_n a sice polární pro formu h, neboť $h(a_i, a_n) = \varphi(a_i) = 0$ pro každé $i \in \widehat{n-1}$.

Q.E.D.

Lemma 6: *Nechť h je hermitovská forma na V_n, Q její diagonála, $(a_1, \ldots, a_n)$ je polární báze hermitovské formy h, $i \in \hat{n}$ takové, že $Q(a_i) = 0$. Pak $a_i \in N_h$.*

Důkaz: Nechť $y \in V_n$. Pak

$$h(a_i, y) = h(a_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} h(a_i, a_j) =$$
$$= \overline{\alpha_i} h(a_i, a_i) = \overline{\alpha_i} Q(a_i) = 0.$$

Q.E.D.

Věta 96: *Nechť h je hermitovská forma na V_n, Q její diagonála, $(a_1, \ldots, a_n)$ je polární báze hermitovské formy h. Pak počet nul v posloupnosti $(Q(a_1), \ldots, Q(a_n))$ nezávisí na volbě polární báze a je roven $\dim N_h$.*

Důkaz: Nechť $(\forall i \in \hat{n})(Q(a_i) \neq 0)$. Dokažme, že $N_h = \{\theta\}$. Nechť tedy $x \in N_h$. Pak $(\forall y \in V_n)(h(x, y) = 0)$. Protože x je lineární kombinací vektorů polární báze, platí

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j,$$

$$h(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j, y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h(a_j, y).$$

Položme nyní $y = a_k$. Dostaneme

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h(a_j, a_k) = \alpha_k h(a_k, a_k) = \alpha_k Q(a_k).$$

Odtud vyplývá, že $(\forall k \in \hat{n})(\alpha_k = 0)$ a tedy $x = \theta$. Nezávislost na volbě polární báze vyplývá z lemmatu 6.

Nechť $l \in \hat{n}$ takové, že $(\forall i \in \hat{l})(Q(a_i) = 0)$ a $(\forall i > l)(Q(a_i) \neq 0)$. Dokažme, že $N_h = [a_1, \ldots, a_l]_\lambda$. Z předcházejícího lemmatu vyplývá, že $N_h \supset [a_1, \ldots, a_l]_\lambda$. Zbývá tedy dokázat, že $N_h \subset [a_1, \ldots, a_l]_\lambda$. Nechť tedy $x \in N_h$,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \ .$$

Pak $\forall y \in V_n$ platí

$$h(x, y) = 0.$$

Tedy $\forall y \in V_n$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j h(a_j, y) = 0.$$

Zvolme $y = a_k$ pro $k > l$. Pak $\alpha_k Q(a_k) = 0$, odtud $\alpha_k = 0$ pro $k > l$. Tedy

$$x = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_j.$$

Nezávislost vyplývá z jednoznačnosti $dim\, N_h$.

Q.E.D.

Definice 70: *Nechť V je vektorový prostor nad T, nechť $Q : V \mapsto R$. Říkáme, že Q je* **kvadratická forma** *na V právě když existuje hermitovská forma h na V taková, že Q je její diagonálou. Tuto formu h nazýváme* **polárou** *kvadratické formy Q.*
Polární bázi poláry h (resp. nulitu h) nazýváme **polární bází** *kvadratické formy Q, (resp.* **nulitou** *Q).*

Kvadratickou formu Q nazýváme **regulární** *(resp.* **singulární***) právě když je regulární (resp. singulární) její polára.*

Věta 97 (Zákon setrvačnosti kvadratických forem) : *Nechť Q je kvadratická forma na V_n, nechť $(a_1, \ldots, a_n)$ je její polární báze. Nechť p, q, r je počet kladných, resp. záporných, resp. nul posloupnosti $(Q(a_1), \ldots, Q(a_n))$. Uspořádaná trojice p, q, r nezávisí na volbě polární báze.*

Důkaz: Dokažme nezávislost čísla p na volbě polární báze. Nechť nejprve $p = 0$ (tedy všechna čísla $Q(a_1), \ldots, Q(a_n)$ jsou menší nebo rovna nule). Je-li $x \in V_n$, můžeme jej vyjádřit ve tvaru $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j$. Pak platí

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \, Q(a_j) \leq 0.$$

Platí tedy $(\forall x \in V_n)(Q(x) \leq 0)$. Tento vztah platí i pro prvky libovolné polární báze, tedy $p = 0$ pro libovolnou polární bázi.
Podobně, je-li $p = n$, platí $(\forall x \in V_n, x \neq \theta)(Q(x) > 0)$. Totéž platí i pro prvky libovolné polární báze, a proto $p = n$ pro libovolnou polární bázi.
Nechť $0 < p < n$. Uspořádejme vektory polární báze tak, aby platilo $(\forall i \in \hat{p})(Q(a_i) > 0)$ a $(\forall i > p)(Q(a_i) \leq 0)$. Sestrojme množinu $\mathcal{B} = \{P \subset\subset V_n | (\forall x \in P)(x \neq \theta)(Q(x) > 0)\}$. Množina $\mathcal{B}$ je neprázdná, neboť $[a_1, \ldots, a_p]_\lambda \in \mathcal{B}$. Je-li totiž $x \in [a_1, \ldots, a_p]_\lambda$,

$$x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_j, \; x \neq \theta,$$

platí

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{p} |\alpha_j|^2 \, Q(a_j) > 0.$$

Dokažme dále, že $(\forall P \in \mathcal{B})(\dim P \leq p)$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $(\exists P \in \mathcal{B})(\dim P > p)$. Sestrojme podprostor $\tilde{P} = [a_{p+1}, \ldots, a_n]_\lambda$. Je-li $x \in \tilde{P}$, platí $Q(x) \leq 0$. Podle 1. věty o dimenzi platí

$$\dim(P \cap \tilde{P}) = \dim P + \dim \tilde{P} - \dim(P + \tilde{P}) > p + (n - p) - n = 0.$$

Tedy v průniku P a $\tilde{P}$ leží nenulový vektor, což je spor s konstrukcí těchto prostorů.
Nechť $(a'_1, \ldots, a'_n)$ je polární báze, nechť p' je počet kladných čísel v posloupnosti $(Q(a'_1), \ldots, Q(a'_n))$. Uspořádejme vektory polární báze tak, aby platilo
$(\forall i \in \hat{p'})(Q(a'_i) > 0)$ a $(\forall i > p')(Q(a'_i) \leq 0)$. Protože $(a'_1, \ldots, a'_n)$ je polární báze, musí platit $(\forall P \in \mathcal{B})(\dim P \leq p')$. Protože současně platí, že $[a_1, \ldots, a_p]_\lambda \in \mathcal{B}$ a $[a'_1, \ldots, a'_{p'}]_\lambda \in \mathcal{B}$, dostáváme, že $p \leq p'$ a $p' \leq p$, tedy $p' = p$.

Q.E.D.

Definice 71: *Čísla p, resp q z předchozí věty nazýváme* **kladným**, *resp.* **záporným indexem setrvačnosti** *kvadratické formy Q. Trojice (p, q, r) se nazývá* **signatura** *Q. Číslo $p + q$ se nazývá* **hodnost** *kvadratické formy Q.*

Definice 72: *Nechť Q je kvadratická forma na V. Říkáme, že Q je*

1) **pozitivně definitní** *právě když* $(\forall x \in V)(x \neq \theta)(Q(x) > 0)$,
2) **negativně definitní** *právě když* $(\forall x \in V)(x \neq \theta)(Q(x) < 0)$,
3) **pozitivně semidefinitní** *právě když* $(\forall x \in V)(Q(x) \geq 0) \wedge (\exists x_0 \in V)(x_0 \neq \theta)(Q(x_0) = 0)$,
4) **negativně semidefinitní** *právě když* $(\forall x \in V)(Q(x) \leq 0) \wedge (\exists x_0 \in V)(x_0 \neq \theta)(Q(x_0) = 0)$,
5) **indefinitní** *právě když* $(\exists x_1, x_2 \in V)[(Q(x_1) > 0) \wedge (Q(x_2) < 0)]$.

Definice 73: *Nechť h je hermitovská forma na V_n, Q její diagonála, nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je báze V_n. Matici ${}^{\mathcal{X}}Q \in T^{n,n}$, kde ${}^{\mathcal{X}}Q_{i,j} = h(x_i, x_j)$, nazýváme* **maticí hermitovské formy** *h, resp.* **maticí kvadratické formy** *Q v bázi $\mathcal{X}$.*

Věta 98: *Nechť Q je kvadratická forma na V_n. Potom hodnost této kvadratické formy je rovna hodnosti matice kvadratické formy v libovolné bázi V_n.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze V_n. Snadno dokážeme, že platí

$$^{\mathcal{Y}}Q = ({}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}})^T \cdot {}^{\mathcal{X}}Q \cdot {}_{\mathcal{X}}\overline{\mathbf{P}}_{\mathcal{Y}},$$

kde $\mathbf{P}^T$ značí matici transponovanou, $\overline{\mathbf{P}}$ značí matici s prvky komplexně sdruženými vzhledem k matici $\mathbf{P}$. Odtud ihned vyplývá, že $\mathrm{h}({}^{\mathcal{X}}Q) = \mathrm{h}({}^{\mathcal{Y}}Q)$, neboť násobení regulární maticí nemění hodnost. Zvolíme-li polární bázi $\mathcal{A}$, pak $\mathrm{h}({}^{\mathcal{A}}Q) = \mathrm{h}(Q)$.

Q.E.D.

Lemma 7: *Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze V_n. Potom platí:*

$$_{\mathcal{Y}\#}\mathbf{P}_{\mathcal{X}\#} = ({}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}})^T.$$

Důkaz: Označme $({}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}})_{ij} = \alpha_{ij}$ a $({}_{\mathcal{Y}\#}\mathbf{P}_{\mathcal{X}\#})_{ij} = \beta_{ij}$. Potom

$$x_k{}^{\#} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} y_j{}^{\#}$$

a

$$\beta_{jk} = x_k{}^{\#}(y_j) = x_k{}^{\#}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_k{}^{\#}(x_i) = \alpha_{kj}.$$

Q.E.D.

Důsledek 10: *Nechť V_n je vektorový prostor nad T, Φ je báze $V_n{}^{\#}$. Potom existuje báze $\mathcal{A}$ prostoru V_n taková, že $\mathcal{A}^{\#} = \Phi$.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Definujme bázi $\mathcal{A}$ vztahem

$$_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\mathcal{A}} = (({}_{\mathcal{X}\#}\mathbf{P}_{\Phi})^T)^{-1}.$$

Potom $({}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{A}}^{-1})^T = ({}_{\mathcal{A}}P_{\mathcal{X}})^T = {}_{\mathcal{X}\#}P_{\Phi} = {}_{\mathcal{X}\#}P_{\mathcal{A}\#}$. Odtud plyne, že $\mathcal{A}^{\#} = \Phi$.

Q.E.D.

Věta 99 (Jacobiho): *Nechť Q je kvadratická forma na V_n, $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\forall k \in \hat{n}$ platí*

$$\Delta_k = \det {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje polární báze $\mathcal{A}$ kvadratické formy Q taková, že $(\forall x \in V_n)$ platí

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}|\xi_1|^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}|\xi_2|^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}|\xi_3|^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}|\xi_n|^2,$$

kde $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jsou souřadnice vektoru x v bázi $\mathcal{A}$.

Důkaz: Důkaz je konstruktivní. Definujme bázi $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ vztahem

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} x_j,$$

kde čísla $\alpha_j^{(k)}$ jsou řešeními soustavy rovnic

$$x_Q\begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1^k} \\ \overline{\alpha_2^k} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_k^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno ověříme, že soubor $\mathcal{A}$ je lineárně nezávislý, tedy tvoří bázi prostoru V_n. Nechť $j \leq k$, h je polára Q. Platí

$$h(a_k, a_j) = h(a_k, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^{(j)} x_i) = \sum_{i=1}^{j} \overline{\alpha_i^j} h(a_k, x_i).$$

Protože pro $i \leq k$ platí

$$h(a_k, x_i) = h(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} x_j, x_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} h(x_j, x_i) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \overline{h(x_i, x_j)} = \sum_{j=1}^{k} \overline{h(x_i, x_j) \cdot \overline{\alpha_j^{(k)}}} = \delta_{ik},$$

dostáváme

$$h(a_k, a_j) = \sum_{i=1}^{j} \overline{\alpha_i^{(j)}} \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & j < k \\ \overline{\alpha_k^{(k)}}, & j = k. \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že báze $\mathcal{A}$ je polární. Platí tedy $\forall x \in V_n$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} Q(a_i)\,|\xi_i|^2.$$

Zbývá tedy dokázat, že

$$Q(a_1) = \frac{1}{\Delta_1},$$

a

$$Q(a_j) = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$$

pro $j > 1$. Protože $h(a_j, a_j) = Q(a_j) = \alpha_j^{(j)}$, dostáváme ihned z definice vektoru a_1, že

$$Q(a_1) = \frac{1}{\Delta_1}.$$

Pro $j > 1$ vyplývá vztah

$$Q(a_j) = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$$

z Cramerova pravidla.

Q.E.D.

Věta 100 (Sylvestrovo kritérium): *Nechť Q je kvadratická forma na V_n, $\mathcal{X}$ je báze V_n, nechť*

$$\Delta_k = \det {}^{\mathcal{X}}Q\begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix}.$$

Potom Q je pozitivně definitní právě když $(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k > 0)$.

Důkaz: $\Leftarrow$ Nechť $(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k > 0)$. Z Jacobiho věty vyplývá, že $\forall x \in V_n$, $x \neq \theta$, platí

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}|\xi_1|^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}|\xi_2|^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}|\xi_3|^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}|\xi_n|^2 > 0.$$

$\Rightarrow$ Dokažme, že $(\forall k \in \hat{n})(\Delta_k \neq 0)$. Důkaz proveďme sporem, tj. předpokládejme, že $(\exists k_0 \in \hat{n})(\Delta_{k_0} = 0)$. Potom submatice

$${}^{\mathcal{X}}Q\begin{pmatrix} 1, \dots, k_0 \\ 1, \dots, k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x_1, x_1), & \dots, & h(x_1, x_{k_0}) \\ & \vdots & \\ h(x_{k_0}, x_1), & \dots, & h(x_{k_0}, x_{k_0}) \end{pmatrix}$$

má lineárně závislé řádky. Tedy existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}$ taková, že $\forall j \in \hat{k_0}$ platí

$$0 = \sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i h(x_i, x_j) = h(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i x_i, x_j)$$

a přitom

$$\sum_{i=1}^{k_0} |\alpha_i| > 0.$$

Odtud vyplývá, že

$$h(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{k_0} \alpha_j x_j) = Q(\sum_{i=1}^{k_0} \alpha_i x_i) = 0.$$

To je spor s tím, že forma Q je pozitivně definitní.
Kladnost Δ_k pak vyplývá z Jacobiho věty a pozitivní definitnosti Q.

Q.E.D.

16. Vektorové prostory se skalárním součinem (prehilbertovy prostory)

Definice 74: *Nechť V je vektorový prostor nad T, h je hermitovská forma na V taková, že její diagonála je pozitivně definitní. Dvojici (V, h) nazýváme* **prostorem se skalárním součinem h** *(značíme $\mathcal{H}$). Číslo $h(x, y)$, $x, y \in V$, nazýváme* **skalárním součinem vektorů** *x, y (značíme $h(x, y) = (x, y)$). Číslo $\sqrt{(x, x)}$ nazýváme* **normou** *vektoru x (značíme $\|x\|$). Reálný prostor se skalárním součinem nazýváme* **eukleidovským** *(značíme $\mathcal{E}$), komplexní prostor se skalárním součinem nazýváme* **unitárním** *(značíme U).*

Věta 101: *Skalární součin na prostoru $\mathcal{H}$ je zobrazení $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto T$ s vlastnostmi*

1) $(\alpha x + y, z) = \alpha (x, z) + (y, z)$ $\forall \alpha \in T$, $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$

2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$

3) $(x, \alpha y + z) = \overline{\alpha} (x, y) + (x, z)$ $\forall \alpha \in T$, $\forall x, y, z \in \mathcal{H}$

4) $(x, \theta) = (\theta, x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$

5) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$; $\|x\| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

6) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall \alpha \in T$ $\forall x \in \mathcal{H}$.

Důkaz: Důkazy tvrzení 1) - 3) a 6) plynou ihned z vlastností hermitovské formy. Tvrzení 4) vyplývá ze skutečnosti, že $\theta = 0 \cdot y$ pro $y \in V$. Tvrzení 5) vyplývá z toho, že skalární součin je hermitovská forma s pozitivně definitní diagonálou.

Q.E.D.

Příklad skalárního součinu: *Nechť $x, y \in T^n$. Definujme*

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta}_j,$$

kde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Snadno ověříme, že jde o skalární součin (stačí ověřit vlastnosti 1), 2), 5) věty 101). Tento skalárním součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

Věta 102 (Schwarzova nerovnost): *Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, (x, y) je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Potom*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Rovnost ve Schwarzově nerovnosti nastává právě tehdy, je-li soubor (x, y) lineárně závislý.

Důkaz: Pro $x = \theta$ platí ve Schwarzově nerovnosti rovnost. Uvažujme dále $x \neq \theta$. Nechť $\lambda \in T$. Potom platí

$$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \|\lambda x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\, \lambda (x, y) = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\, \lambda (x, y) .$$

Pro $x \neq \theta$ položme

$$\lambda = \frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} .$$

Pro takto zvolené λ platí

$$\left|\frac{\overline{(x,y)}^2}{\|x\|^4}\right| \|x\|^2 + \|y\|^2 - \frac{2\mathrm{Re}\ |(x,y)|^2}{\|x\|^2} \geq 0,$$

tedy

$$\|y\|^2 - \frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

Z poslední nerovnosti vyplývá Schwarzova nerovnost. Jsou-li vektory x, y lineárně závislé a $x \neq \theta$, pak $(\exists \lambda \in T)(y = \lambda x)$ a tedy $|(x,y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda|\,(x,x) = \|x\|\,|\lambda|\,\|x\| = \|x\|\,\|\lambda x\| = \|x\|\,\|y\|$. Z první nerovnosti a z toho, že skalární součin je pozitivně definitní forma plyne, že rovnost v nerovnosti platí jen tehdy, když $\lambda x - y = 0$, tj. když vektory x, y jsou lineárně závislé.

Q.E.D.

Věta 103 (trojúhelníková nerovnost): *Nechť (x,y) je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Potom*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Rovnost nastává, právě když existuje $\alpha \in T$, $\alpha \geq 0$, $\alpha x = y$ nebo $x = \alpha y$.

Důkaz: Nechť $x, y \in \mathcal{H}$. Potom s využitím Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\ (x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|(x,y)| \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Nechť platí rovnost $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Pak platí rovnost ve Schwarzově nerovnosti, tedy vektory x, y jsou lineárně závislé. Je-li $y = \theta$, je $y = 0 \cdot x$. Nechť tedy $y \neq \theta$. Potom $x = \alpha y$. Protože platí $\mathrm{Re}\ (x,y) = |(x,y)|$, musí platit $(x,y) \geq 0$, tedy $(\alpha y, y) = \alpha\,(y,y) \geq 0$, odkud plyne, že $\alpha \geq 0$. Nechť existuje $\alpha \geq 0$ takové, že $x = \alpha y$. Potom

$$\|x+y\| = \|\alpha y + y\| = |\alpha + 1|\,\|y\| = \|\alpha y\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Q.E.D.

Poznámka 39: *Specielní tvar* **rovnoběžníkové rovnosti** *(viz věta 94, tvrzení 3):*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dále platí **polarizační identity** *(viz věta 94, tvrzení 4):*
Pro $T = \mathcal{R}$: $(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.
Pro $T = \mathcal{C}$: $(x,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \mathrm{i}(\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \|x-\mathrm{i}y\|^2)]$.

Definice 75: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Matici $\mathbf{G} \in T^{k,k}$, $\mathbf{G}_{i,j} = (x_i, x_j)$, nazýváme* **Gramovou maticí souboru** *$(x_1, \ldots, x_k)$. Její determinant nazýváme* **Gramovým determinantem** *souboru $(x_1, \ldots, x_k)$ (nebo* **Gramiánem***).*

Poznámka 40: *Je-li $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ báze prostoru $\mathcal{H}$, je $\mathbf{G}$ maticí skalárního součinu v bázi $\mathcal{X}$.*

Věta 104: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Potom $(x_1, \ldots, x_k)$ je lineárně nezávislý, právě když* $\det \mathbf{G} \neq 0$.

Důkaz: $\Leftarrow$ Nechť $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta$. Potom $(\forall i \in \hat{k})$ platí

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, x_i \right) = 0,$$

tedy $(\forall i \in \hat{k})$ platí

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(x_j, x_i \right) = 0.$$

Protože maticí soustavy je transponovaná Gramova matice a její determinant je podle předpokladu různý od nuly, má soustava pouze triviální řešení, tedy $(\forall i \in \hat{k})(\alpha_i = 0)$.
$\Rightarrow$ Předpokládejme, že soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ je lineárně nezávislý a $\det \mathbf{G} = 0$. Potom řádky matice tvoří lineárně závislý soubor, tedy existují čísla α_j, $j \in \hat{k}$, taková, že $(\forall i \in \hat{k})$ platí $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(x_j, x_i \right) = 0$ a $\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| > 0$. Tedy $\forall i \in \hat{k}$ platí

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, x_i \right),$$

a proto

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \right).$$

Odtud plyne, že

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = \theta.$$

Našli jsme tedy nulovou netriviální kombinaci vektorů $(x_1, \ldots, x_k)$, což je spor s předpokladem, že soubor je lineárně nezávislý.

Q.E.D.

17. Ortogonalita

Definice 76: *Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem. Vektory x, y z $\mathcal{H}$ nazýváme* **ortogonální (kolmé)**, *právě když $(x, y) = 0$ (značíme $x \perp y$). Soubor vektorů $(x_1, \ldots, x_k)$ z $\mathcal{H}$ nazýváme ortogonální, právě když $(\forall i, j \in \hat{k},\ i \neq j)((x_i, x_j) = 0)$. Soubor vektorů nazýváme* **ortonormální**, *právě když $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$.*

Věta 105 (Pythagorova věta): *Nechť (x, y) je ortogonální soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Potom*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Důkaz: Pro ortogonální vektory $x, y \in \mathcal{H}$ platí

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Q.E.D.

Poznámka 41: *Nechť (x, y) je soubor vektorů z $\mathcal{E}$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Potom je soubor (x, y) ortogonální.*

Věta 106: *Ortogonální soubor* **nenulových** *vektorů je lineárně nezávislý. Speciálně, každý ortonormální soubor je lineárně nezávislý.*

Důkaz: Protože Gramova matice ortogonálního souboru je diagonální se všemi prvky na diagonále různými od nuly, je $\det \mathbf{G} \neq 0$. Podle věty 104 je tedy soubor lineárně nezávislý.

Q.E.D.

Věta 107: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Potom existuje ortogonální soubor $(y_1, \ldots, y_k)$ vektorů z $\mathcal{H}$ takový, že $(\forall l \in \hat{k})([x_1, \ldots, x_l]_\lambda = [y_1, \ldots, y_l]_\lambda)$. Je-li navíc $(x_1, \ldots, x_k)$ lineárně nezávislý, lze soubor $(y_1, \ldots, y_k)$ volit ortonormální.*

Důkaz: Důkaz provedeme konstruktivně - popíšeme tzv. **Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces**. Budeme postupovat indukcí.
Položme $y_1 = x_1$. Předpokládejme dále, že máme ortogonální soubor $(y_1, \ldots, y_l), l < k$ a $(\forall s \in \hat{l})([y_1, \ldots, y_s]_\lambda = [x_1, \ldots, x_s]_\lambda)$. Definujme vektor y_{l+1} vztahem

$$y_{l+1} = x_{l+1} - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j y_j .$$

Je zřejmé, že $[x_1, \ldots, x_{l+1}]_\lambda = [y_1, \ldots, y_{l+1}]_\lambda$. Hledejme vhodná čísla α_j, $j \in \hat{l}$, tak, aby $(\forall i \in \hat{l})((y_{l+1}, y_i) = 0)$. Z definice vektoru y_{l+1} dostáváme

$$(y_{l+1}, y_i) = (x_{l+1}, y_i) - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j (y_j, y_i) = (x_{l+1}, y_i) - \alpha_i \|y_i\|^2 .$$

Pro $y_i \neq \theta$ položme

$$\alpha_i = \frac{(x_{l+1}, y_i)}{\|y_i\|^2},$$

pro $y_i = \theta$ můžeme zvolit α_i libovolně, například 0. Pokud je soubor $(x_1, \ldots, x_k)$ lineárně nezávislý, není žádný z vektorů y_i roven nulovému vektoru. Tedy každý vektor y_i můžeme vydělit jeho normou. Tím se kolmost vektorů nenaruší a soubor bude ortonormální.

Q.E.D.

Důsledek důkazu: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální soubor vektorů z $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Potom vektor*

$$x - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j$$

je kolmý na všechny vektory x_i, $i \in \hat{k}$.

Definice 77: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální soubor vektorů z $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Číslo (x, x_i), $i = 1, \ldots, k$, nazýváme* **i-tý Fourierův koeficient** *vektoru x vzhledem k souboru $(x_1, \ldots, x_k)$.*

Věta 108 (Besselova nerovnost): *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální soubor vektorů z $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Potom platí*

$$\sum_{j=1}^{k} |(x, x_j)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Důkaz: Protože $(x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální soubor, platí

$$0 \leq \left(x - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j, x - \sum_{i=1}^{k} (x, x_i)\, x_i \right) = \left(x - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j, x \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\,(x_j, x) = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |(x, x_j)|^2 .$$

Q.E.D.

Definice 78: *Nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Říkáme, že je* **úplný**, *právě když*

(1) $(x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální,

(2) neexistuje nenulový vektor, který by byl kolmý na všechny vektory daného souboru.

Věta 109: *Nechť $S = (x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1) S je úplný.

2) S je báze $\mathcal{H}$ (tj. $\dim \mathcal{H} = k$).

3) $(\forall x \in \mathcal{H})$ platí

$$x = \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j .$$

4) $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})$ platí

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\,(x_j, y) .$$

5) $(\forall x \in \mathcal{H})$ platí

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |(x, x_j)|^2.$$

(tzv. Parsevalova rovnost)

Důkaz: Dokažme řetězec implikací 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3),..., 5) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2)

Je-li soubor S ortonormální, je lineárně nezávislý. Pro $x \in \mathcal{H}$ a $\forall j \in \hat{k}$ platí

$$(x - \sum_{i=1}^{k} (x, x_i)\, x_i) \perp x_j.$$

Vzhledem k tomu, že soubor S je úplný, platí

$$x - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j = \theta,$$

$$x = \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j.$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Nechť $x \in \mathcal{H}$. Protože S je báze prostoru $\mathcal{H}$, můžeme x vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j.$$

Tedy $\forall i \in \hat{k}$ platí

$$\left(x - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, x_i \right) = 0 = (x, x_i) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (x_j, x_i) = (x, x_i) - \alpha_i.$$

Odtud

$$\alpha_i = (x, x_i).$$

3) $\Rightarrow$ 4)

Vyjádříme-li vektory x, y podle 3), dostáváme

$$(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j, \sum_{i=1}^{k} (y, x_i)\, x_i \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} (x, x_j)\, \overline{(y, x_i)}\, (x_j, x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, \overline{(y, x_j)}.$$

4) $\Rightarrow$ 5)
Tvrzení vyplývá ihned z 4), položíme-li $y = x$.
5) $\Rightarrow$ 1)
Nechť $x \in \mathcal{H}, x \perp x_j \forall j \in \hat{k}$. Potom

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |(x, x_j)|^2 = 0,$$

odkud plyne $x = \theta$.

Q.E.D.

Definice 79: *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor se skalárním součinem, $\emptyset \neq M \subset H$. Množinu*

$$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} | (\forall y \in M)((x, y) = 0)\}$$

nazýváme **ortogonální doplněk** *množiny M do prostoru $\mathcal{H}$.*

Věta 110: *Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathcal{H}$. Potom*
1) $M^{\perp} \subset\subset \mathcal{H}$,
2) $(M^{\perp})^{\perp} \supset M$.

Důkaz:
1) Platí $\theta \in M^{\perp}$. Nechť $x, y \in M^{\perp}, \alpha \in T$. Potom $(\forall z \in M)$ platí $(\alpha x + y, z) = \alpha(x, z) + (y, z) = 0$, tedy $\alpha x + y \in M^{\perp}$.
2) Nechť $x \in M$. Potom $\forall y \in M^{\perp}$ platí $(x, y) = 0$. Podle definice je pak $x \in (M^{\perp})^{\perp}$.

Q.E.D.

Věta 111 (o ortogonálním rozkladu): *Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, $P \subset\subset \mathcal{H}, \dim P < +\infty$. Potom*
1) $\mathcal{H} = P \oplus P^{\perp}$,
2) $(P^{\perp})^{\perp} = P$.

Důkaz:
1) Je-li $\dim P = 0$, pak $P^{\perp} = \mathcal{H}$. Nechť $\dim P = k \in N$ a nechť $(x_1, \ldots, x_k)$ je ortonormální báze P.
Dokažme nejprve, že $\mathcal{H} = P + P^{\perp}$. Vektor $x \in \mathcal{H}$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j + (x - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j).$$

Vektor $\sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j$ leží v prostoru P a podle důsledku důkazu věty 107 leží vektor $x - \sum_{j=1}^{k} (x, x_j)\, x_j$ v prostoru $P^{\perp}$.
Dokažme že $\mathcal{H} = P \oplus P^{\perp}$. Nechť $x \in P \cap P^{\perp}$. Potom musí platit, že $(x, x) = 0$, tedy $x = \theta$, tj. v průniku prostorů P a $P^{\perp}$ leží pouze nulový vektor.
2) Podle tvrzení 2) věty 110 víme, že platí $P \subset\subset (P^{\perp})^{\perp}$. Stačí tedy dokázat, že $(P^{\perp})^{\perp} \subset P$. Nechť tedy $x \in (P^{\perp})^{\perp}$. Potom podle tvrzení 1) můžeme vektor x vyjádřit ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in P, z \in P^{\perp}$. Potom $(x, z) = 0 = (y, z) + (z, z) = \|z\|^2$, tedy $z = \theta$, odkud vyplývá $x \in P$.

Q.E.D.

18. Lineární funkcionály a lineární operátory na prostorech se skalárním součinem

Úvaha: *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor se skalárním součinem. Zvolme pevně vektor $y \in \mathcal{H}$. Přiřadíme-li každému vektoru $x \in \mathcal{H}$ číslo $(x, y) \in T$, máme tím definován lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{H}$. Takto můžeme každému vektoru y přiřadit lineární funkcionál. Otázka je, zda také každému funkcionálu $\varphi \in \mathcal{H}^{\#}$ můžeme přiřadit vektor $z \in \mathcal{H}$ takový, aby $(\forall x \in \mathcal{H})$ platilo $(\varphi(x) = (x, z))$. Na prostorech konečné dimenze to možné je, jak o tom hovoří následující věta.*

Věta 112. (Rieszova): *Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom*

$$(\forall \varphi \in \mathcal{H}^{\#})(\exists_1 z \in \mathcal{H})(\forall x \in \mathcal{H})(\varphi(x) = (x, z)).$$

Důkaz: Dokažme nejprve **existenci** vektoru z.
Je-li $\varphi = \Theta$, potom $z = \theta$. Nechť $\varphi \neq \Theta$, $\dim \mathcal{H} = n \in \mathcal{N}$. Potom podle věty 111 platí

$$\mathcal{H} = \varphi^{-1}(0) \oplus (\varphi^{-1}(0))^{\perp}.$$

Podle vět o dimenzi je dimenze prostoru $(\varphi^{-1}(0))^{\perp}$ rovna jedné, tento prostor má tedy bázi tvořenou jedním vektorem, označme jej u. Hledaný vektor z musí ležet v $(\varphi^{-1}(0))^{\perp}$, protože rovnost $\varphi(x) = (x, z)$ má platit i pro $x \in \varphi^{-1}(0)$ a tedy $(x, z) = 0$ pro každé $x \in \varphi^{-1}(0)$. Snadno ověříme, že $z = \frac{\overline{\varphi(u)}}{\|u\|^2} \cdot u$. Nechť $x \in \mathcal{H}$, $x = a + b$, $a \in \varphi^{-1}(0)$, $b \in (\varphi^{-1}(0))^{\perp}$, $b = \alpha u$, $\alpha \in T$. Pak

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(b) = \alpha\varphi(u) \quad \text{a}$$

$$(x, z) = (a + b, z) = (b, z) = \left(\alpha u, \frac{\overline{\varphi(u)}}{\|u\|^2} \cdot u\right) = \alpha\varphi(u)\,,$$

t.j. $\varphi(x) = (x, z)$.

Dokažme nyní **jednoznačnost** vektoru z. Předpokládejme, že $(\exists z_1, z_2 \in \mathcal{H})(z_1 \neq z_2)(\forall x \in \mathcal{H})(\varphi(x) = (x, z_1) = (x, z_2))$. Potom $\forall x \in \mathcal{H}$ platí $(x, z_1 - z_2) = 0$, tedy také $(z_1 - z_2, z_1 - z_2) = 0$, odkud $\|z_1 - z_2\| = 0$. Tedy $z_1 = z_2$, což je spor s předpokladem $z_1 \neq z_2$.

Q.E.D.

Věta 113: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom existuje právě jeden lineární operátor $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ takový, že*

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})((Ax, y) = (x, A^* y)).$$

Důkaz: Dokažme **existenci** operátoru A^*.
Zvolme vektor $y \in \mathcal{H}$ libovolně, ale pevně. Definujme lineární funkcionál φ_y vztahem

$$\varphi_y(x) = (Ax, y)\,, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Podle Rieszovy věty víme, že ke každému lineárnímu funkcionálu φ_y existuje vektor (označme jej A^*y) takový, že $\varphi_y(x) = (x, A^*y)$. Na $\mathcal{H}$ máme tedy definováno zobrazení A^*, pro které platí

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})((Ax, y) = (x, A^*y)).$$

Dokažme, že $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:
Nechť $x, x_1, x_2 \in \mathcal{H}, \alpha \in T$. Pak

$$(Ax, \alpha x_1 + x_2) = (x, A^*(\alpha x_1 + x_2)) = \overline{\alpha}(Ax, x_1) + (Ax, x_2) = \\ = \overline{\alpha}(x, A^*x_1) + (x, A^*x_2) = (x, \alpha A^*x_1 + A^*x_2).$$

Tedy $\forall x, x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ platí

$$(x, A^*(\alpha x_1 + x_2) - (\alpha A^*x_1 + A^*x_2)) = 0,$$

odkud volbou $x = A^*(\alpha x_1 + x_2) - (\alpha A^*x_1 + A^*x_2)$ dostáváme

$$A^*(\alpha x_1 + x_2) = (\alpha A^*x_1 + A^*x_2).$$

Dokažme **jednoznačnost** operátoru A^*.
Předpokládejme, že existují operátory $A_1^* \neq A_2^*$ takové, že $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

$$(Ax, y) = (x, A_1^*y) = (x, A_2^*y),$$

tedy $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí

$$(x, A_1^*y - A_2^*y) = 0. \tag{1}$$

Protože $A_1^* \neq A_2^*$, existuje $a \in \mathcal{H}$ takové, že $A_1^*a \neq A_2^*a$.
Položíme-li $y = a, x = A_1^*y - A_2^*y$, dostáváme z rovnosti (1), že $A_1^*a - A_2^*a = \theta$, což je spor s volbou vektoru a.

Q.E.D.

Definice 80: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Lineární operátor $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ takový, že $\forall x, y \in \mathcal{H}$ platí $(Ax, y) = (x, A^*y)$ se nazývá* **operátor sdružený** *k operátoru A.*

Věta 114: *Nechť A, B, $E \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \dim \mathcal{H} < +\infty, \alpha \in T$. Potom platí*

1) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$,
3) $(AB)^* = B^*A^*$,
4) $(A^*)^* = A$,
5) $E^* = E$,
6) $\Theta^* = \Theta$.
7) Je-li A regulární, potom je A^* regulární a platí

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Důkaz:

1) Z definice sdruženého operátoru a z vlastností skalárního součinu dostáváme

$$((A + B)x, y) = (Ax + Bx, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^*y) + (x, B^*y) = \\ = (x, (A^* + B^*)y).$$

2) Důkaz provedeme obdobně jako v bodě 1).
3) Důkaz provedeme obdobně jako v bodě 1).
4) $(A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$.
5) Zřejmé.
6) Zřejmé.
7) S využitím vlastnosti 3) a 5) dostáváme
$(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = E^* = E$, odkud plyne tvrzení věty.

Q.E.D.

Definice 81: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Říkáme, že A je*
1) **normální**, *právě když $AA^* = A^*A$,*
2) **samosdružený**, *právě když $A^* = A$.*
Pro $T = \mathcal{R}$ nazýváme operátor A **symetrickým**,
pro $T = \mathcal{C}$ nazýváme operátor A **hermitovským**,
3) **izometrický**, *právě když $AA^* = E(= A^*A)$.*
Pro $T = \mathcal{R}$ nazýváme operátor A **ortogonální**,
pro $T = \mathcal{C}$ nazýváme operátor A **unitární**.

Věta 115: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Potom*

$$A = \Theta \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})((Ax, y) = 0).$$

Důkaz:
$\Rightarrow$ Je-li $A = \Theta$, platí $(\forall x, y \in \mathcal{H})(Ax = \theta)$ a $(Ax, y) = 0$.
$\Leftarrow$ Nechť $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})((Ax, y) = 0)$. Potom také $(\forall x \in \mathcal{H})((Ax, Ax) = 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathcal{H})(Ax = \theta) \Rightarrow A = \Theta$.

Q.E.D.

Věta 116: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, A je samosdružený. Potom $A = \Theta$ právě když $(\forall x \in \mathcal{H})((Ax, x) = 0)$.*

Důkaz:
$\Rightarrow$ Zřejmé.
$\Leftarrow$ Nechť $x, y \in \mathcal{H}$. Pak

$$\begin{aligned}(A(x+y), x+y) = 0 &= (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) = \\ &= (Ax, y) + (y, A^*x) = \\ &= (Ax, y) + \overline{(Ax, y)} = \\ &= 2\mathrm{Re}\ (Ax, y).\end{aligned}$$

Položíme-li $y = Ax$, dostaneme $(\forall x \in \mathcal{H})(\mathrm{Re}\ (Ax, Ax) = 0)$, tedy $(\forall x \in \mathcal{H})(Ax = \theta)$, odkud plyne $A = \Theta$.

Q.E.D.

Věta 117: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Potom*

$$A = \Theta \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})((Ax, x) = 0).$$

Důkaz:
$\Rightarrow$ Zřejmé.
$\Leftarrow$ Z předpokladu plyne

$$(A(x+y), x+y) = 0.$$

Úpravou levé strany získáme rovnost

$$(Ax, y) + (Ay, x) = 0, \tag{1}$$

odkud po dosazení ix za x dostaneme

$$(A(\mathrm{i}x), y) + (Ay, \mathrm{i}x) = 0.$$

Tedy

$$\mathrm{i}\,(Ax, y) - \mathrm{i}\,(Ay, x) = 0,$$

$$(Ax, y) - (Ay, x) = 0. \tag{2}$$

Sečtením rovnic (1) a (2) dostáváme $(\forall x, y \in \mathcal{H})((Ax, y) = 0)$, odkud $A = \Theta$.

Q.E.D.

tedy operátor je normální. Podle věty 118 platí $\forall x \in \mathcal{H}_n$

$$\|(A - \lambda E)x\| = \|(A - \lambda E)^* x\| .$$

Tedy $\forall x \in \mathcal{H}_n$ platí rovnost

$$\|Ax - \lambda x\| = \left\|A^* x - \overline{\lambda} x\right\| .$$

Tedy pro vlastní vektor x platí, že $Ax - \lambda x = \theta$, právě když $A^* x - \overline{\lambda} x = \theta$.

Q.E.D.

Věta 124: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, A je normální. Potom vlastní vektory operátoru A příslušející dvěma různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

Důkaz: Nechť λ, μ jsou dvě různá vlastní čísla a nechť $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Protože současně platí

$$(Ax, y) = \lambda (x, y)$$

a

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = (x, \overline{\mu} y) = \mu (x, y) ,$$

dostáváme $(x, y) = \theta$.

Q.E.D.

Věta 125: *Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, A je normální, λ_0 je vlastním číslem operátoru A. Potom $\nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0)$.*

Důkaz: Definujme $P = \{x \in \mathcal{H}_n | Ax = \lambda_0 x\}$. Dokažme, že $P^\perp$ je invariantní podprostor, tedy že $A(P^\perp) \subset P^\perp$.
Nechť $y \in A(P^\perp)$. Pak $(\exists x \in P^\perp)(y = Ax)$. Nechť $z \in P$. Potom

$$(y, z) = (Ax, z) = (x, A^* z) = (x, \overline{\lambda_0} z) = \lambda_0 (x, z) = 0,$$

tedy $y \in P^\perp$.
Nechť $\nu_g(\lambda_0) = n$. Potom také $\nu_a(\lambda_0) = n$.
Nechť tedy $1 \leq \nu_g(\lambda_0) = k < n$. Označme $(x_1, \ldots, x_k)$ bázi P, $\tilde{\mathcal{X}} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ bázi $P^\perp$.
Pak $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ tvoří bázi $\mathcal{H}_n$. Matice operátoru A v bázi $\mathcal{X}$ má blokový tvar

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda_0 E & \theta \\ \theta & {}^{\tilde{\mathcal{X}}}B \end{pmatrix},$$

kde operátor $B \in \mathcal{L}(P^\perp)$ představuje zúžení operátoru A na prostor $P^\perp$. Pro charakteristický polynom operátoru A platí

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det({}^{\mathcal{X}}A - \lambda \mathbf{E}) = (\lambda_0 - \lambda)^k p_B(\lambda).$$

Dokažme sporem, že $p_B(\lambda_0) \neq 0$. Nechť $p_B(\lambda_0) = 0$. Pak $\lambda_0 \in \sigma(B)$, tj. $(\exists y \neq \theta)(y \in P^\perp)(By = \lambda_0 y)$. Odtud plyne $Ay = \lambda_0 y$, odkud $y \in P$, což je spor, neboť současně $y \in P^\perp$, $y \neq \theta$.

Q.E.D.

Věta 126: *Nechť $A \in \mathcal{L}(U_n)$, A je hermitovský. Potom $\sigma(A) \subset R$.*

Důkaz: Nechť $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Pak $(\exists x \in U_n)(x \neq \theta)(Ax = \lambda x)$. Protože platí současně

$$(Ax, x) = \lambda (x, x) = \lambda \|x\|^2$$

a

$$(Ax, x) = (x, A^* x) = (x, Ax) = \overline{\lambda} \|x\|^2 ,$$

dostáváme $\lambda = \overline{\lambda}$, odkud plyne $\lambda \in \mathcal{R}$.

Q.E.D.

Věta 127: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n)$, A je symetrický. Potom*

$$\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$$

(tedy $p_A^{-1}(0) \subset \mathcal{R}$).

Důkaz: Definujme operátor $\tilde{A}$ na prostoru $\mathcal{C}^n$ se standardním skalárním součinem vztahem ${}^{\mathcal{E}}\tilde{A} = {}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X}$ je ortonormální báze $\mathcal{E}_n$. Operátor $\tilde{A}$ je hermitovský, neboť matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je symetrická. Podle předchozí věty platí, že $p_{\tilde{A}}^{-1}(0) = \sigma(\tilde{A}) \subset \mathcal{R}$. Avšak operátory $A, \tilde{A}$ mají stejné charakteristické polynomy, neboť

$$p_{\tilde{A}}(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda E) = \det(A - \lambda E) = p_A(\lambda).$$

Tím je věta dokázána.

Q.E.D.

Věta 128: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, A je izometrický, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Pak $\|\lambda_0\| = 1$.*

Důkaz: Nechť $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Pak existuje $x \in H_n$, $x \neq \theta$, takové, že $Ax = \lambda_0 x$. Pro skalární součin (Ax, Ax) platí současně

$$(Ax, Ax) = (\lambda_0 x, \lambda_0 x) = |\lambda_0|^2 \|x\|$$

a

$$(Ax, Ax) = (x, x) = \|x\|^2 .$$

Odtud plyne, že $|\lambda_0| = 1$.

Q.E.D.

Věta 129: *Normální operátor na unitárním prostoru je diagonalizovatelný. Diagonální bázi je možné volit ortonormální.*

Důkaz: Operátor je diagonalizovatelný, neboť $T = \mathcal{C}$ a podle věty 125 platí pro všechna vlastní čísla, že $\nu_a = \nu_g$. Vezmeme-li soubor vlastních vektorů příslušejících vlastnímu číslu λ_0 a provedeme Gramův-Schmidtův ortonormalizační proces, dostaneme ortonormální diagonální bázi.

Q.E.D.

Podobně dostáváme následující větu:

Věta 130: *Normální operátor na E_n je diagonalizovatelný právě tehdy, má-li charakteristická rovnice samé reálné kořeny. Diagonální bázi je možné volit ortonormální.*

Poznámka 42: *Každý symetrický operátor je diagonalizovatelný.*

Věta 131: *Nechť $A \in \mathcal{L}(H_n)$, nechť A je diagonalizovatelný v ortonormální bázi. Potom A je normální.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální diagonální báze. Operátor A má v této bázi tvar

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Potom

$$^{\mathcal{X}}A \cdot (^{\mathcal{X}}A)^* = (^{\mathcal{X}}A)^* \cdot {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}.$$

Q.E.D.

Věta 132: *Nechť $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ jsou báze $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{X}$ je ortonormální. Potom $\mathcal{Y}$ je ortonormální, právě když $_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}$ je izometrická.*

Důkaz: Definujme operátor $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ takový, že platí $Px_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$ (jde o operátor přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$). Potom platí

$$^{\mathcal{X}}P = {}_{\mathcal{X}}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}.$$

$\Rightarrow$ Dokažme, že operátor P je izometrický.
Nechť $x \in \mathcal{H}_n$. Potom

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j,$$

kde α_j jsou Fourierovy koeficienty. Podle Parsevalovy rovnosti platí

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Pro vektor Px platí

$$Px = P\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j.$$

Protože $\mathcal{Y}$ je ortonormální báze, platí také

$$\|Px\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Pro všechna $x \in \mathcal{H}_n$ tedy platí, že $\|Px\| = \|x\|$, a proto P je izometrický.
$\Leftarrow$ Nechť P je izometrický. Potom $\forall i, j = 1, \dots, n$ platí

$$(y_i, y_j) = (Px_i, Px_j) = (x_i, x_j) = \delta_{ij}.$$

Tedy $\mathcal{Y}$ je ortonormální.

Q.E.D.

Věta 133: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.*
(1) Je-li A samosdružený, je $det\, A \in \mathcal{R}$;
(2) je-li A izometrický, je $|det\, A| = 1$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{X}$ je ortonormální báze $\mathcal{H}_n$, ${}^{\mathcal{X}}A = \mathbf{A}$. Potom

$$det\, A^* = det\, {}^{\mathcal{X}}(A^*) = det\, ({}^{\mathcal{X}}A)^* = det\, \overline{\mathbf{A}^T} = \overline{det\, \mathbf{A}^T} = \overline{det\, \mathbf{A}} = \overline{det\, A}\,.$$

1) $A = A^* \Rightarrow det\, A = det\, A^* = \overline{det\, A} \Rightarrow det\, A \in \mathcal{R}$;
2) $A\, A^* = E \Rightarrow det\, A \cdot det\, A^* = 1 \Rightarrow |det\, A| = 1$.

Q.E.D.

Definice 83: *Říkáme, že čtvercová matice je* **kvazidiagonální**, *jestliže má tvar*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \\ & & & 0 & & & & & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \\ & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & & & \cos\varphi_k & \sin\varphi_k \\ & & & & & & & & & & & & -\sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{pmatrix},$$

kde $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{R}$, $\varphi_j \neq l\pi$, $l \in \mathcal{Z}$.

Lemma 8: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $P \subset\subset \mathcal{H}_n$ invariantní vzhledem k A. Potom $P^\perp$ je invariantní vzhledem k A^*.*

Důkaz: Dokážeme, že $A^*(P^\perp) \subset P^\perp$. Nechť $y \in A^*(P^\perp)$. Existuje tedy $x \in P^\perp$ takový, že $y = A^*x$. Pro všechna $z \in P$ platí :

$$(y, z) = (A^*x, z) = (x, Az) = 0,$$

neboť $Az \in P$. Je tedy $y \in P^\perp$.

Q.E.D.

Věta 134: *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_n)$, A je ortogonální. Potom existuje ortonormální báze $\mathcal{E}_n$ taková, že matice operátoru A je v ní kvazidiagonální.*

Důkaz: Důkaz provedeme indukcí podle n.
Je-li $n = 1$, má charakteristický polynom jediný kořen 1 nebo -1 a A je diagonalizovatelný.
Nechť tedy $n > 1$ a nechť každý ortogonální operátor na eukleidovském prostoru dimenze menší než n lze kvazidiagonalizovat v ortonormální bázi. Rozlišíme dva případy:

a) p_A má reálný kořen λ. Nechť $P = (A - \lambda E)^{-1}(\theta)$. Je $\dim P \geq 1$, P je invariantní vzhledem k A, tedy $A(P) \subset P$ a protože A je regulární, je $A(P) = P$. Proto také

$A^{-1}(P) = P$ a podle lemmatu je $P^{\perp}$ invariantní vzhledem k $(A^{-1})^* = A$. Nyní stačí aplikovat indukční předpoklad na $A/_{P^{\perp}} \in \mathcal{L}(P^{\perp})$.

b) p_A nemá žádný reálný kořen. Nechť λ je kořen p_A, $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, $\beta \neq 0$ (je $\alpha^2 + \beta^2 = 1$). Nechť $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ je ortonormální báze $\mathcal{E}_n$, $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^{n,1})$, $\mathcal{C}^{n,1}$ se standardním skalárním součinem, ${}^{\mathcal{E}}\tilde{A} = {}^{\mathcal{X}}A$ $(= \mathbf{A})$ ($\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathcal{C}^{n,1}$). Protože ${}^{\mathcal{X}}A$ je ortogonální matice, je $\tilde{A}$ unitární operátor s vlastním číslem λ. Existuje tedy $\tilde{z} \in \mathcal{C}^{n,1}$, $\tilde{z} \neq \theta$, takový, že $\tilde{A}\tilde{z} = \lambda\tilde{z}$. Lze psát $\tilde{z} = \tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{y}$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{R}^{n,1}$. Nechť $(\tilde{x})_{\mathcal{E}} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\tilde{y})_{\mathcal{E}} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Definujme v $\mathcal{E}_n$ vektory

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j, \; y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j.$$

Platí:

$$\begin{aligned}\lceil Ax \rceil_{\mathcal{X}} + \mathrm{i}\lceil Ay \rceil_{\mathcal{X}} &= \mathbf{A}\tilde{x} + \mathrm{i}\mathbf{A}\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{A}\tilde{y} = \tilde{A}(\tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{y}) = \\ &= \tilde{A}\tilde{z} = (\alpha + \mathrm{i}\beta) \cdot (\tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{y}) = (\alpha\tilde{x} - \beta\tilde{y}) + \mathrm{i}(\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y}).\end{aligned}$$

Odtud $\lceil Ax \rceil_{\mathcal{X}} = \alpha\tilde{x} - \beta\tilde{y}$, $\lceil Ay \rceil_{\mathcal{X}} = \beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y}$ a tedy

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} (\alpha\xi_j - \beta\eta_j) x_j = \alpha x - \beta y.$$

a podobně

$$Ay = \beta x + \alpha y.$$

Dále platí :

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{y}) &= \tilde{A}\tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{A}\tilde{y} = (\alpha\tilde{x} - \beta\tilde{y}) - \mathrm{i}(\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y}) = \\ &= (\alpha - \mathrm{i}\beta)(\tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{y}) = \overline{\lambda}(\tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{y}).\end{aligned}$$

Tedy vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$ operátoru $\tilde{A}$ přísluší vektor $\tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{y}$. Protože $\lambda \neq \overline{\lambda}$ $(\beta \neq 0)$, je $\tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{y} \perp \tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{y}$. Odtud plyne, že také vektory x, y jsou ortogonální, neboť

$$\begin{aligned}0 = (\tilde{x} + \mathrm{i}\tilde{y}, \tilde{x} - \mathrm{i}\tilde{y}) &= \|\tilde{x}\|^2 - \|\tilde{y}\|^2 + \mathrm{i}((\tilde{y}, \tilde{x}) + (\tilde{x}, \tilde{y}) = \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 + \mathrm{i}((y, x) + (x, y)) = \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\mathrm{i}\,(x, y)\end{aligned}$$

a tedy $(x, y) = 0$ a $\|x\| = \|y\|$.
Je tedy $P = [x, y]_{\lambda}$ dvourozměrný invariantní podprostor $\mathcal{E}_n$ vzhledem k A. Báze

$$\mathcal{Y} = \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$$

je ortonormální báze P,

$$A\frac{x}{\|x\|} = \alpha\frac{x}{\|x\|} - \beta\frac{y}{\|y\|},$$

$$A\frac{y}{\|y\|} = \beta\frac{x}{\|x\|} + \alpha\frac{y}{\|y\|}$$

(je $\|x\| = \|y\|$)!). Protože $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, existuje úhel φ takový, že $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$ a platí

$$\mathcal{Y}(A/_P) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Zbytek důkazu je stejný jako v části a), neboť $P^\perp$ je rovněž invariantní vzhledem k A a má dimenzi $n-2$.

Q.E.D.

20. Metrická geometrie

Definice 84: *Nechť M_1, M_2 jsou 2 podmnožiny prostoru $\mathcal{H}$, M_1, $M_2 \neq \emptyset$. Číslo*

$$\inf\{\|x-y\| \,|x \in M_1, y \in M_2\}$$

nazýváme **vzdáleností množin** M_1, M_2, *značíme* $\varrho(M_1, M_2)$.

Poznámka 43: *Infimum z předchozí definice je konečné, neboť množina norem rozdílů vektorů je neprázdná a zdola omezená. Vzdálenost bodu od množiny $\varrho(\{a\}, M)$ budeme značit $\varrho(a, M)$.*

Věta 135: *Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem, $P \subset\subset \mathcal{H}$, $\dim P < +\infty$. Nechť $x_0 \in \mathcal{H}$, kde $x_0 = a + b$, $a \in P$, $b \in P^{\perp}$. Pak $\varrho(x_0, P) = \|b\|$.*

Důkaz: Podle definice platí $\varrho(x_0, P) = \inf\{\|x_0 - x\| \,|x \in P\}$. Pomocí Pythagorovy věty dostaneme následující odhad:

$$\begin{aligned}\|x_0 - x\|^2 &= \|a + b - x\|^2 = \|(a - x) + b\|^2 = \\ &= \|a - x\|^2 + \|b\|^2 \geq \|b\|^2 .\end{aligned}$$

Zvolíme-li $x = a$, dostaneme $\|x_0 - x\|^2 = \|b\|^2$. Ukázali jsme tedy, že $\min\{\|x_0 - x\| \,|x \in P\} = \|b\|$.

Q.E.D.

Věta 136: *Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathcal{H}$. Potom*

$$\varrho(W_1, W_2) = \varrho(a_1 - a_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)),$$

kde $a_1 \in W_1$, $a_2 \in W_2$.

Důkaz: Chceme dokázat, že

$$\inf\{\|x - y\| \,|x \in W_1, y \in W_2\} = \inf\{\|a_1 - a_2 - p\| \,|p \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\}.$$

Protože obě množiny jsou stejné, jsou i infima stejná.

Q.E.D.

Definice 85: *Nechť $\mathcal{E}$ je eukleidovský prostor.*
a) Nechť x, $y \in \mathcal{E}$ jsou nenulové. **Úhlem vektorů** *x, y nazýváme číslo*

$$\arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Tedy úhel dvou vektorů je z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
b) Nechť p, q jsou přímky v $\mathcal{E}$. **Úhlem přímek** *p, q nazýváme číslo*

$$\arccos \frac{|(s_p, s_q)|}{\|s_p\| \, \|s_q\|},$$

kde s_p (resp. s_q) je směrový vektor přímky p (resp. q). Tedy úhel dvou přímek je číslo z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Poznámka 44:
a) *Podle Schwarzovy nerovnosti je*

$$\frac{|(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1,$$

tedy oba výrazy v definici 83 mají smysl.
b) *Snadno ověříme, že úhel přímek nezávisí na volbě báze zaměření: Nechť* $s'_p = \alpha s_p$, $s'_q = \beta s_q$. *Potom*

$$\frac{|(s'_p, s'_q)|}{\|s'_p\|\,\|s'_q\|} = \frac{|(\alpha s_p, \beta s_q)|}{\|\alpha s_p\|\,\|\beta s_q\|} = \frac{|(s_p, s_q)|}{\|s_p\|\,\|s_q\|}.$$

Definice 86: *Nechť* W *je nadrovina v* $\mathcal{E}$. *Každý nenulový vektor ze* $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$ *nazýváme* **normálový vektor** *nadroviny (značíme* n_w*). Je-li* $p \subset \mathcal{E}$ *přímka, nazýváme* **úhlem** p, W *číslo*

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|(s_p, n_w)|}{\|s_p\|\,\|n_w\|}.$$

Tedy úhel přímky a nadroviny je číslo z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. *Jsou-li* W_1, W_2 *nadroviny v* $\mathcal{E}$, *nazýváme jejich* **úhlem** *číslo*

$$\arccos \frac{|(n_{w_1}, n_{w_2})|}{\|n_{w_1}\|\,\|n_{w_2}\|}.$$

Úhel dvou nadrovin je z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Věta 137: *Nechť* $a \in \mathcal{E}_n$, $a \neq \theta$, $\alpha \in \mathcal{R}$. *Pak* $\{x \in \mathcal{E}_n | (a,x) = \alpha\}$ *je nadrovina v* $\mathcal{E}_n$, *a vektor* a *je její normálový vektor.*

Důkaz: Definujme funkcionál φ vztahem $(\forall x \in \mathcal{E}_n)(\varphi(x) = (a,x))$, tedy $\varphi \in \mathcal{E}_n{}^{\#}$, $\varphi \neq \Theta$. Potom $W = \{x \in \mathcal{E}_n | \varphi(x) = \alpha\}$ je nadrovina, její zaměření je $\mathcal{Z}(W) = \{x \in \mathcal{E}_n | (a,x) = 0\} = [a]_\lambda{}^{\perp}$. Tedy platí

$$\mathcal{Z}(W)^{\perp} = \left([a]_\lambda{}^{\perp}\right)^{\perp} = [a]_\lambda.$$

Q.E.D.

Věta 138: *Nechť* W *je nadrovina v* $\mathcal{E}_n$, n_w *její normálový vektor. Potom existuje* $\alpha \in \mathcal{R}$ *takové, že* $W = \{x \in \mathcal{E}_n | (n_w, x) = \alpha\}$.

Důkaz: Varietu W lze vyjádřit ve tvaru $W = a + \mathcal{Z}(W)$, kde $a \in W$. Definujme α vztahem $\alpha = (n_w, a)$.
Dokažme nyní, že $W \subset \{x \in \mathcal{E}_n | (n_w, x) = \alpha\}$. Nechť $x \in W$, $x = a + p$, $p \in \mathcal{Z}(W)$. Potom $(n_w, x) = (n_w, a) + (n_w, p) = \alpha + 0 = \alpha$.
Dokažme dále, že $W \supset \{x \in \mathcal{E}_n | (n_w, x) = \alpha\}$. Nechť $(n_w, x) = \alpha$. Pak
$(n_w, x - a) = 0 \Rightarrow x - a \perp n_w \Rightarrow x - a \in \mathcal{Z}(W) \Rightarrow x \in a + \mathcal{Z}(W) = W$.

Q.E.D.

Příklad: *V* $\mathcal{R}^2$ *se standardním skalárním součinem dostáváme podle věty 137 pro přímku o rovnici* $ax + by = c$, *že vektor o složkách* (a,b) *je normálovým vektorem přímky.*

Věta 139: *Nechť W je nadrovina v $\mathcal{E}_n$ o rovnici $(a,x) = \alpha$, $a \neq \theta$, $\alpha \in \mathcal{R}$. Nechť $b \in \mathcal{E}_n$. Potom*

$$\varrho(b, W) = \frac{|(a,b) - \alpha|}{\|a\|}.$$

Důkaz: Podle věty 136 platí $\varrho(b, W) = \varrho(b - c, \mathcal{Z}(W))$, $c \in W$. Vektor $b - c$ můžeme vyjádřit ve tvaru $b - c = d + \lambda a$, kde $\lambda \in \mathcal{R}$, $d \in \mathcal{Z}(W)$. Pro takto zvolený vektor bude platit

$$\varrho(b, W) = \|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\| . \tag{1}$$

Pro skalární součin (a, b) dostáváme

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a, c + d + \lambda a) = (a,c) + (a,d) + \lambda (a,a) = \\ &= \alpha + 0 + \lambda \|a\|^2 .\end{aligned}$$

Odtud

$$\lambda = \frac{(a,b) - \alpha}{\|a\|^2}.$$

Dosazením do vztahu (1) dostáváme tvrzení věty.

Q.E.D.

Definice 87: *Nechť (x, y) je soubor vektorů z $\mathcal{R}^3$ se skalárním součinem.* **Vektorovým součinem** *souboru (x, y) nazýváme vektor $z \in \mathcal{R}^3$ s vlastnostmi :*

1) $(x, z) = (y, z) = 0$.
2) $\|z\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2$.
3) Je-li $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $z = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, potom

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Vektorový součin značíme $x \times y$.

Poznámka 45: *Vektorový součin $x \times y$ je souborem (x, y) určen jednoznačně. Jsou-li vektory x, y lineárně závislé, plyne z vlastnosti 2), že $z = 0$.*
Jsou-li vektory x, y lineárně nezávislé, pak:
Vlastnost 1) říká, že z je v ortogonálním doplňku $[x, y]_\lambda$ (tedy na přímce).
Vlastnost 2) říká, že z celé přímky vyhovují pouze dva vektory : vektor, jehož velikost je dána vztahem 2) a vektor k němu opačný.
Vlastnost 3) vybírá jediný z těchto dvou vektorů.

Důsledek 11: *Nechť (x, y) je soubor nenulových vektorů z $\mathcal{R}^3$ se skalárním součinem, φ je úhel mezi x, y. Potom*

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \sin \varphi.$$

Důkaz: $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2 \varphi$.
Odtud

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \, |\sin \varphi| .$$

Protože úhel φ je z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, dostáváme tvrzení věty.

Q.E.D.

Věta 140: *Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je ortonormální báze $\mathcal{R}^3$ se skalárním součinem, $x_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $x_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $x_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Nechť*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Nechť $x, y \in \mathcal{R}^3$, $(x)_{\mathcal{X}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $(y)_{\mathcal{X}} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Potom

$$(x \times y)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \right).$$

Důkaz: Stačí ověřit vlastnosti 1), 2), 3) z definice vektorového součinu.

1)

$$(x, z) = \xi_1 \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} + \xi_2 \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix} + \xi_3 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnost $(y, z) = 0$ se dokáže analogicky.

2) S využitím Parsevalovy rovnosti dostáváme

$$\|z\|^2 = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2,$$

$$\|x\|^2 \|y\|^2 - (x, y)^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) - (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3)^2.$$

3) Označme

$$D_1 = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že ověřit vlastnost 3) znamená dokázat, že

$$\det(AB) \geq 0,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Podle předpokladu věty je $\det B > 0$. Jelikož

$$\det A = {D_1}^2 + {D_2}^2 + {D_3}^2 \geq 0,$$

platí

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \geq 0.$$

Q.E.D.

Věta 141: *Nechť $x, y, z \in \mathcal{R}^3$ se skalárním součinem, $\alpha \in \mathcal{R}$. Potom*
1) $y \times x = -(x \times y)$,
2) $(\alpha x) \times y = x \times (\alpha y) = \alpha(x \times y)$,
3) $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$,
4) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

Důkaz: Zvolme ortonormální bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathcal{R}^3$ takovou, která splňuje podmínku věty 140. Nechť $(x)_{\mathcal{X}} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $(y)_{\mathcal{X}} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Potom

$$(x \times y)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= \left(-\begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \eta_3 & \eta_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} \right) = -(y \times x)_{\mathcal{X}}.$$

Rovněž další tvrzení plynou z vlastností determinantů a předchozí věty.

Q.E.D.

Dodatek

V dodatku uvedeme základní tvrzení o polynomech.

Definice 1: *Komplexní funkce p komplexní proměnné t je* **polynom**, *právě když existují $n \in \mathcal{N}_0$ a $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{C}$ tak, že*

$$(\forall t \in \mathcal{C}) \left(p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i \right).$$

Čísla $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ nazýváme **koeficienty polynomu**. *Definujeme* **stupeň polynomu** p *jako*

$$\max\{j | \alpha_j \neq 0\},$$

stupeň nulového polynomu $p(t) \equiv 0$ je **nedefinován**.

Definice 2: *Číslo $\lambda \in \mathcal{C}$ nazýváme* **kořen polynomu** p, *právě když $p(\lambda) = 0$.*

Věta 1 (Základní věta algebry): *Polynom stupně alespoň 1 má alespoň 1 kořen.*

Věta 2 (Bezoutova): *Nechť p je polynom stupně $n \geq 1$, $\lambda_0 \in \mathcal{C}$. Potom existuje polynom q stupně $n-1$ tak, že pro všechna $t \in \mathcal{C}$ platí*

$$p(t) = p(\lambda_0) + (t - \lambda_0)\, q(t).$$

Důkaz: Buď

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \wedge \alpha_n \neq 0.$$

Připomeňme známý vzorec

$$a^k - b^k = (a - b) \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i}.$$

Potom lze psát

$$\begin{aligned} p(t) - p(\lambda_0) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (t^k - \lambda_0^k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t^k - \lambda_0^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k (t - \lambda_0) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \lambda_0^{k-1-i} \right) \\ &= (t - \lambda_0) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i \lambda_0^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Položme

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_0^{k-1-i} t^i;$$

na pravé straně je člen s nejvyšší mocninou t roven $\alpha_n\, t^{n-1}$ a tedy q je polynom stupně $n-1$ a platí

$$p(t) = p(\lambda_0) + (t - \lambda_0)\, q(t).$$

Q.E.D.

Důsledek 1: *Polynom stupně n má nejvýše n kořenů.*

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí podle n–stupeň polynomu.

(1) $n = 0$: Každý polynom nulového stupně je konstantní nenulová funkce, tudíž nemá žádný kořen.

(2) Nechť každý polynom stupně n má nejvýše n kořenů. Vezměme libovolný polynom p stupně $n+1$. Podle věty 1 má p alespoň 1 kořen λ_0. Podle věty 2 existuje polynom q stupně n takový, že

$$p(t) = p(\lambda_0) + (t - \lambda_0)\, q(t) = (t - \lambda_0)\, q(t).$$

Podle indukčního předpokladu má q nejvýše n kořenů a zřejmě p má nejvýše o jeden kořen více než q, tedy p má nejvýše $n+1$ kořenů.

Q.E.D.

Důsledek 2: *Koeficienty polynomu (a tedy i stupeň) jsou určeny jednoznačně.*

Důkaz: Sporem: Nechť existuje polynom p takový, že

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, t^j = \sum_{j=0}^{n} \beta_j\, t^j,$$

a přitom

$$(\exists j \geq 0)(\alpha_j \neq \beta_j).$$

Označme

$$k = \max\{j \geq 0 | \alpha_j \neq \beta_j\}.$$

Potom musí

$$(\forall t \in \mathcal{C}) \left(\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - \beta_j)\, t^j = 0 \right),$$

tj. polynom stupně k by měl nekonečně mnoho kořenů, což je spor s důsledkem 1.

Q.E.D.

Důsledek 3: *Hodnoty dvou různých polynomů téhož stupně n se mohou rovnat nejvýše v n bodech.*

Důkaz: Buďte p, q dva různé polynomy stupně n. Pak $p - q$ je polynom stupně nejvýše n a má podle důsledku 1 nejvýše n kořenů.

Q.E.D.

Věta 3: *Nechť p je polynom stupně $n \geq 1$:*

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, t^j$$

a nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou všechny jeho různé kořeny, tj. $k \leq n$ a $(\forall i, j \in \hat{k}, i \neq j)(\lambda_i \neq \lambda_j)$. Potom existují jednoznačně určená přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \qquad p(t) = \alpha_n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}. \tag{1}$$

Důkaz:

1) Existence čísel $n_1, \ldots, n_k$ s požadovanými vlastnostmi - indukcí podle n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť $n > 1$ a nechť pro polynomy stupně $n - 1$ tvrzení platí. Podle Bezoutovy věty existuje polynom q stupně $n - 1$ takový, že pro každé $t \in C$ platí $p(t) = (t - \lambda_k)q(t)$. Je-li $q(\lambda_k) \neq 0$, potom podle indukčního předpokladu existují přirozená čísla $n_1, \ldots, n_{k-1}$ taková, že $q(t) = \alpha_n \prod_{i=1}^{k-1} (t - \lambda_i)^{n_i}$ pro $t \in C$ a $\sum_{i=1}^{k-1} n_i = n - 1$. Označíme-li $n_k = 1$, dostáváme tvrzení věty.
Je-li $q(\lambda_k) = 0$, dostaneme podle indukčního předpokladu existenci přirozených čísel $n_1, \ldots, n_{k-1}, \tilde{n}_k$ s vlastností

$$q(t) = \alpha_n (t - \lambda_k)^{\tilde{n}_k} \prod_{i=1}^{k-1} (t - \lambda_i)^{n_i} \quad \text{pro každé } t \in C.$$

Položíme-li $n_k = \tilde{n}_k + 1$, jsou $n_1, \ldots, n_k$ hledaná čísla pro polynom p, pro která platí $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

2) Jednoznačnost dokážeme sporem. Nechť pro každé $t \in C$ platí

$$\prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i} = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i},$$

kde n_i, m_i jsou přirozená čísla, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n = \sum_{i=1}^{k} m_i$ a existuje $i \in \hat{k}$ takové, že $n_i \neq m_i$. Dále pro jednoduchost označení předpokládejme, že $m_k > n_k$ (jinak kořeny přečíslujeme). Potom pro každé $t \in C$ platí

$$(t - \lambda_k)^{n_k} \Big(\prod_{i=1}^{k-1} (t - \lambda_i)^{n_i} - (t - \lambda_k)^{m_k - n_k} \prod_{i=1}^{k-1} (t - \lambda_i)^{m_i} \Big) = 0 .$$

To ovšem znamená, že výraz ve velké závorce je nulový pro všechna $t \in C$ (jinak by polynom na levé straně měl kladný stupeň $\geq n_k$, a tedy konečný počet kořenů). Platí tedy

$$\prod_{i=1}^{k-1} (t - \lambda_i)^{n_i} = (t - \lambda_k)^{m_k - n_k} \prod_{i=1}^{k-1} (t - \lambda_i)^{m_i}$$

pro každé $t \in C$, což ovšem pro $t = \lambda_k$ pravda není (vpravo je nula, na levé straně číslo nenulové) - spor.

Q.E.D.

Definice 3: *Číslo n_i z věty 3 nazýváme* **násobnost** *kořene λ_i, vyjádření $p(t)$ ve tvaru (1) rozklad polynomu polynomu p na* **kořenové činitele**.

Věta 4: *Buď p polynom s reálnými koeficienty, nechť $\lambda_0 \in \mathcal{C}$ je kořen p. Potom $\overline{\lambda_0}$ je také kořen p a násobnosti λ_0 a $\overline{\lambda_0}$ jsou stejné.*

Důkaz: Buď

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j,$$

kde $\alpha_j \in \mathcal{R}$.

(1) Buď λ_0 kořen polynomu p. Protože

$$p(\overline{t}) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \overline{t}^j = \sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha_j t^j} = \overline{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j} = \overline{p(t)},$$

je také $p(\overline{\lambda_0}) = 0$, tj. také $\overline{\lambda_0}$ je kořen p.

(2) Nechť λ_0 má násobnost k. Je tedy pro každé $t \in C$ $p(t) = (t - \lambda_0)^k q(t)$, kde q je polynom s vlastností $q(\lambda_0) \neq 0$. Podle (1) platí

$$p(t) = \overline{p(\overline{t})} = \overline{(\overline{t} - \lambda_0)^k q(\overline{t})} = (t - \overline{\lambda_0})^k \overline{q(\overline{t})}.$$

Protože pro polynom h, $h(t) = \overline{q(\overline{t})}$, platí $h(\overline{\lambda_0}) = \overline{q(\lambda_0)} \neq 0$, je tedy $\overline{\lambda_0}$ rovněž k-násobný kořen polynomu p.

Q.E.D.

Důsledek 4: *Každý polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má alespoň 1 reálný kořen.*

Důsledek 5: *Každý polynom s reálnými koeficienty lze psát ve tvaru součinu polynomů 1. stupně s reálnými koeficienty a polynomů 2. stupně s reálnými koeficienty.*

Důkaz: Buď p rozepsán dle věty 3 ve tvaru součinu:

$$p(t) = \alpha_n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}.$$

Pro kořen λ_i jsou 2 možnosti:

(1) $\lambda_i \in \mathcal{R}$: Potom se v součinu objeví n_i−krát polynom 1. stupně s reálnými koeficienty

$$t - \lambda_i.$$

(2) $\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$: Potom z věty 4 je též mezi kořeny $\overline{\lambda_i}$ se stejnou násobností n_i a v součinu se proto objeví n_i−krát polynom 2. stupně s reálnými koeficienty

$$(t - \lambda_i)(t - \overline{\lambda_i}) = t^2 - 2(\operatorname{Re} \lambda_i)t + |\lambda_i|^2.$$

Q.E.D.