

ÚVOD DO FYZIKY V ŘEŠENÝCH PŘÍKLADECH

RNDr. Eva Havránková
Prof. Ing. Zdeněk Janout, CSc.
Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.

výrobce digitálních informačních a vzdělávacích systémů TIVI
na mnoha místech světa. Naši členové jsou uživateli nejnovějších počítačů a programů, až
dovádějí kreativitou

2006

České vysoké učení technické v Praze
Nakladatelství ČVUT

ISBN 80-05-00820-5, ISSN 1213-833X, vydání I

0-05-00820-10-08 Vydání

OD JAZYKA K PŘÍKLADECH

Práce využívají materiály z knihy

BRNDL, Eva Havráneková
Přít., jdg. Zdeněk Janout, ČSČ
Doc. jdg. Ivan Štoll, ČSČ

Nakladatelství ČVUT upozorňuje autory na dodržování autorských práv.
Za jazykovou a věcnou správnost obsahu díla odpovídá autor. Text neprošel jazykovou ani
redakční úpravou.

Pře d m l u v a

Předkládaná sbírka zahrnuje několik desítek podrobně řešených příkladů z fyziky - mechaniky, elektřiny a magnetismu, termiky, optiky, atomové a jaderné fyziky. Jsou to většinou příklady, které byly v posledních letech zadávány u přijímacích zkoušek z fyziky na jaderné a fyzikálně inženýrské fakultě Českého vysokého učení technického v Praze a dále některé příklady řešené se studenty v základním kursu fyziky na této fakultě. Byly však vybrány tak, aby k jejich řešení plně postačovaly znalosti fyziky získané na gymnáziu. Výběr a redakci příkladů z mechaniky a elektřiny a magnetismu provedl I. Štoll, příkladů z termiky a optiky E. Havránková, která byla na jaderné fakultě po mnoho let pověřována výběrem příkladů z fyziky k přijímacím zkouškám, příklady z atomové a jaderné fyziky připravil Z. Janout.

Sbírka tedy může sloužit jak studentům gymnázií, kteří se o fyziku zvláště zajímají, případně se připravují ke studiu fyziky na vysoké škole, tak v přípravných kursech, které fakulta pro uchazeče o studium a nově přijaté studenty pořádá. Studenti prvního ročníku fakulty si podle těchto řešených příkladů mohou samostatně zopakovat středoškolskou fyziku a při studiu se pak soustředit již na nové poznatky na vyšší úrovni. Zájemcům o studium podotýkáme, že některé z příkladů jsou možná poněkud obtížnější a u přijímací zkoušky se s nimi nesetkají. Kromě toho, v poslední době jaderná a fyzikálně inženýrská fakulta stále ve větší míře přihlíží ke studijním výsledkům, jakých uchazeči dosáhli ve studiu na střední škole a u maturity, a v mnoha případech přijímací zkoušku vůbec promíjí. Tím spíše je však třeba, aby začínající fyzikové a fyzikální inženýři měli k dispozici pomůcku, která by jim umožnila přesvědčit se o svých schopnostech řešit fyzikální úlohy, případně si potřebné znalosti doplnit. Věříme, že tato sbírka jim bude přitom užitečná.

Praha 1995

Autoři

M E C H A N I K A

Užitečné vzorce

pohyb přímočarý, počáteční podmínky $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$

velikost rychlosti: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, velikost zrychlení: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$,

(přesněji $v = \frac{dx}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$)

rovnoměrný: $v = \text{konst}$, $x = x_0 + vt$

rovnoměrně zrychlený (zpomalený): $a = \text{konst}$, $v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

pohyb křivočarý:

tečné zrychlení: $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, (přesněji $a_t = \frac{dv}{dt}$),

normálové zrychlení: $a_n = \frac{v^2}{r}$

pohyb kruhový: $r = \text{konst}$, $s = r\varphi$, $v = r\omega$, $a_t = r\varepsilon$,

úhlová rychlosť $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, (přesněji $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$)

dostředivé zrychlení $a_n = r\omega^2$

kruhový rovnoměrný: $v = r\omega = \text{konst}$, $\omega = \text{konst}$, $a_t = 0$, $a_n = r\omega^2 = \text{konst}$,

perioda $T = \frac{2\pi}{\omega}$, frekvence $f = \frac{1}{T}$, úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$

síla: \vec{F} , hybnost částice: $\vec{p} = m\vec{v}$, kinetická energie: $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$

Newtonův zákon síly: $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$, (přesněji $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$)

impuls síly: $\Delta\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

práce síly působící podél přímky:

$\Delta A = F\Delta x = \frac{\Delta p}{\Delta t}\Delta x = \bar{v}\Delta p = \frac{v_2+v_1}{2} (mv_2 - mv_1) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1$

výkon síly působící podél přímky: $P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = F\frac{\Delta x}{\Delta t} = Fv$

potenciální energie v homogenním těhovém poli: $U = mgh + \text{konst}$

zákon zachování energie v homogenním těhovém poli: $\frac{mv^2}{2} + mgh = E = \text{konst}$

zákon zachování hybnosti a energie při pružné srážce dvou těles:

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$, $m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v'_1^2 + m_2v'_2^2$

Druhy sil:

síla dostředivá: $F_d = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r}$

síla tření: $F_f = fF_n$ (platí pro malé rychlosti, f je koeficient smykového tření, F_n kolmá tlaková síla)

síla elastická: $F_e = kx$, $ma = -kx$, míří opačným směrem než výchylka x ,

vyvolává harmonický pohyb s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a periodou $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

síla tříhová: $G = mg$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

síla gravitační působící mezi dvěma částicemi nebo kulově symetrickými tělesy:

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

$$\text{na povrchu Země} \quad \kappa \frac{m M_Z}{R_Z^2} = mg, \quad g = \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2}, \quad R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

kruhová rychlosť (rychlosť na kruhové dráze poloměru R): $v_k = \sqrt{\frac{g R_Z^2}{R}}$,

první kosmická rychlosť ($R \approx R_Z$): $v_1 = \sqrt{g R_Z} = 7,91 \text{ km.s}^{-1}$,

parabolická rychlosť (druhá kosmická rychlosť): $v_2 = \sqrt{2} v_1 = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$

matematické kyvadlo: $ma = -mg \sin \varphi$, $F_n = mg \cos \varphi + ml\omega^2$ (l je délka kyvadla)

úhlová frekvence a perioda malých kyvů $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

rotace kolem osy:

moment setrvačnosti hmoty m ve vzdálenosti r od osy rotace $I = mr^2$,

válce (vzhledem k ose symetrie) $I = \frac{1}{2}mR^2$,

koule $I = \frac{2}{5}mR^2$,

tyčky (kolem osy procházející těžištěm) $I = \frac{1}{12}ml^2$

Steinerova věta (pro moment setrvačnosti I' vzhledem k ose procházející

ve vzdálenosti a rovnoběžně s osou procházející těžištěm) $I' = I + ma^2$

pohybová rovnice rotačního pohybu: $I\varepsilon = N$, $N = Fr$, (N je velikost momentu síly, r rameno síly)

kinetická energie rotačního pohybu: $T = \frac{I\omega^2}{2}$

výchylka postupné vlny: $y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$,

kde A je amplituda, T perioda a λ vlnová délka

Hookeův zákon: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{\Delta S}$,

kde $\Delta l/l$ je podélné zkrácení či roztažení tyče, ΔS její průřez, E Youngův modul hydrostatický tlak v kapalině v hloubce h : $p = \rho g h$

Archimedův zákon: vztahová síla $F_v = \rho V g$,

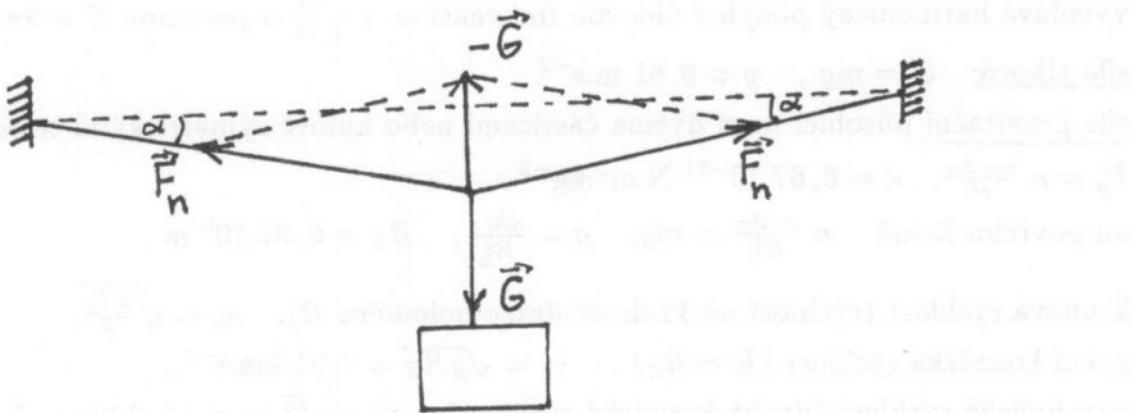
kde ρ je hustota vytlačené kapaliny, V ponořený objem

rovnice kontinuity proudící nestlačitelné kapaliny: $Sv = \text{konst}$,

kde S je průřez a v rychlosť kapaliny

Bernoulliova rovnice: $\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{konst}$

rychlosť výtoku kapaliny z nádoby otvorem v hloubce h : $v = \sqrt{2gh}$



obr. 1

1. Lampa hmotnosti 5 kg visí uprostřed dlouhého původně vodorovného drátu a způsobí jeho prohnutí o 1 stupeň od vodorovného směru (viz obr. 1). Určete velikost síly F_n napínající drát.

Řešení:

Tíhová síla, kterou lampa prohýbá drát musí být vyrovnaná vertikální silou vzniklou jako výslednice napěťových sil působících v drátu. Tedy

$$G = 2F_n \sin \alpha = mg, \quad m = 5\text{kg}, \quad \sin \alpha = \sin 1^\circ \approx \alpha = 0,017$$

$$F_n = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{5 \cdot 9,81}{2 \cdot 0,017} = 1443 \text{ N}.$$

Drát bude napínán stejnou silou, jako kdyby na něj působilo tahem těleso tíhy 1443 N, tedy o hmotnosti 147 kg.

2. Dva hmotné body A a B se začnou pohybovat současně stejným směrem podél osy x . První z nich rovnoměrně rychlostí 10 m.s^{-1} z bodu o souřadnici $x = 1 \text{ m}$, druhý rovnoměrně zrychleně s počáteční rychlostí 10 m.s^{-1} a se zrychlením 1 m.s^{-2} z bodu o souřadnici $x = -1 \text{ m}$ (obr. 2). Kdy a kde se setkají?

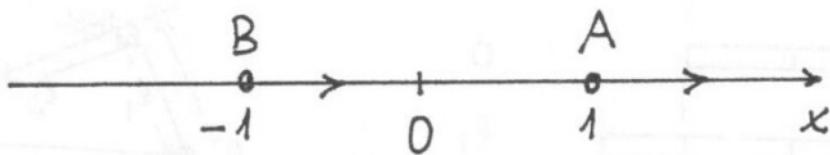
Řešení:

Máme

$$x_A = 10t + 1, \quad x_B = \frac{1}{2}t^2 + 10t - 1,$$

porovnáním pravých stran dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2}t^2 - 2 = 0, \quad \text{odkud } t^2 = 4, \quad t = \pm 2.$$



obr. 2

Protože otázka zní, kdy a kde se body setkají, zajímá nás pouze $t = 2 > 0$. Body se setkají za 2 s v bodě o souřadnici $x = 21$ m. Druhé řešení, $t = -2$ odpovídá situaci, kdy by se body pohybovaly stejným způsobem již dříve než v okamžiku $t = 0$. Bod B by přitom měl nulovou rychlosť v okamžiku $t = -10$ s a začínal by se pohybovat z bodu o souřadnici $x = -51$ m v kladném směru osy x . Rovnoměrně se pohybující bod A by ho míjel v okamžiku $t = -2$ s v bodě o souřadnici $x = -19$ m. Potom by bod B dále nabíral rychlosť a předbíhal by bod A při $t = 2$ s.

3. V okamžiku, kdy se vlak začíná rozjízdět, stojí pozorovatel na peróně u začátku prvního vagónu. Ten kolem něj projede za dobu τ_1 . Po jakou dobu τ_n bude kolem něj projízdět n -tý vagón? Pohyb předpokládejme rovnoměrně zrychlený, všechny vagóny stejně dlouhé (viz obr. 3).

Řešení:

Předpokládejme, že všechny vagóny mají délku l . Potom platí

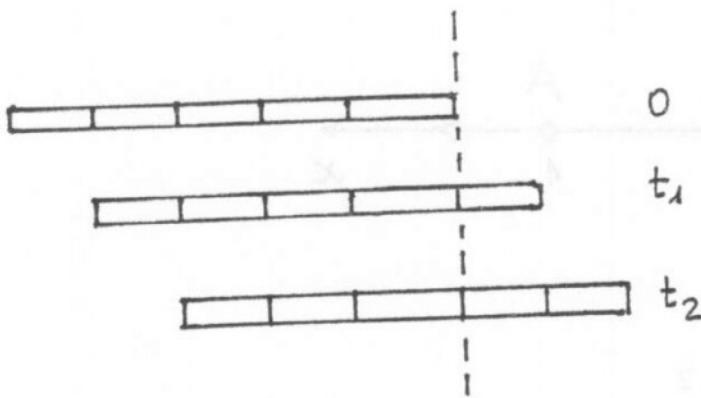
$$l = \frac{1}{2} a \tau_1^2, \quad a = \frac{2l}{\tau_1^2}.$$

Určíme okamžik t_n , kdy bude pozorovatele míjet konec n -tého vagónu:

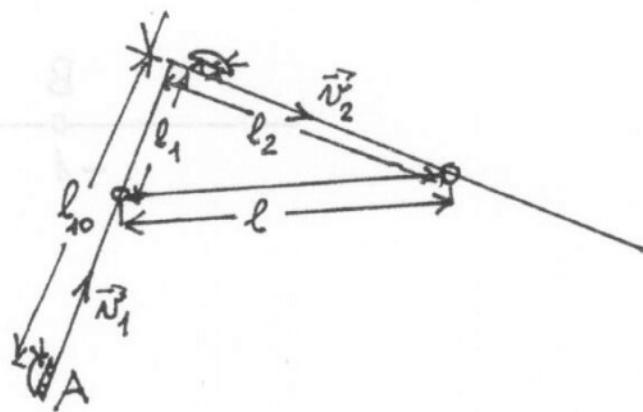
$$n l = \frac{1}{2} a t_n^2, \quad t_n = \sqrt{\frac{2 n l}{a}} = \tau_1 \sqrt{n}.$$

Potom n -tý vagón bude projízdět kolem pozorovatele po dobu

$$\tau_n = t_n - t_{n-1} = \tau_1 (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$



obr. 3



obr. 4

4. Po ramenech pravého úhlu lezou dva brouci. První z bodu A vzdáleného od vrcholu pravého úhlu o vzdálenost l_{10} rychlostí v_1 směrem k vrcholu, druhý po druhém rameni z vrcholu směrem od něho rychlostí v_2 (viz obr. 4). V kterém okamžiku si budou brouci nejbliže a jaké budou přitom jejich vzdálenosti l_1 , l_2 od vrcholu?

Řešení:

Vzdálenosti brouků od vrcholu se mění v čase jako

$$l_1 = l_{10} - v_1 t, \quad l_2 = v_2 t$$

a pro vzájemnou vzdálenost brouků l jako funkci času dostáváme

$$l^2(t) = (l_{10} - v_1 t)^2 + v_2^2 t^2.$$

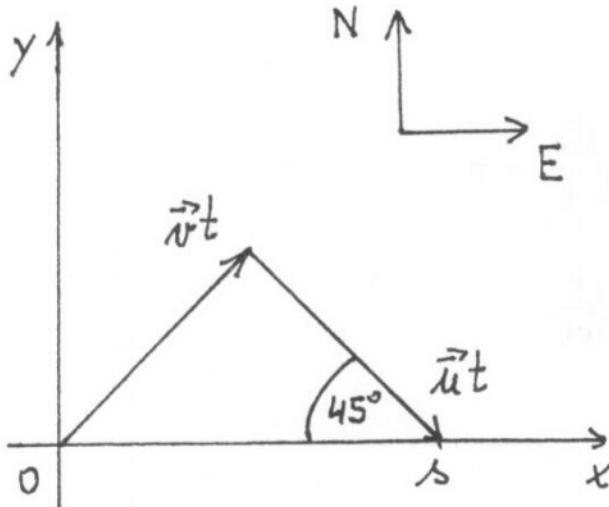
Zderivujeme-li tuto funkci podle času a položíme derivaci rovnu nule, určíme okamžik největšího sblížení brouků. Přitom bude

$$t = \frac{l_{10} v_1}{v_1^2 + v_2^2}, \quad l = \sqrt{\frac{l_{10} v_2}{v_1^2 + v_2^2}}, \quad l_1 = \frac{l v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, \quad l_2 = \frac{l v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

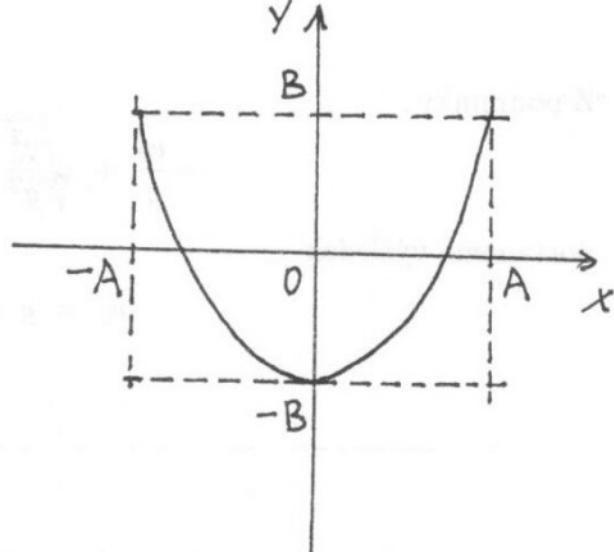
5. Pilot letadla je od svého cíle vzdálen o $s = 200$ km na západ a přitom vane severozápadní vítr o rychlosti $u = 30$ km za hodinu. Určete vektor rychlosti letadla, které chce dosáhnout svého cíle za dobu $t = 40$ minut (obr 5.).

Řešení:

Namíříme osu x směrem východním, osu y směrem severním. Pro složky rychlosti



obr. 5 Vektorové rozložení rychlosti letadla v souřadnicích s osou x
odkud je vzdálenost s mezi výchozím bodem a cílem je $s = \sqrt{2} u t$



obr. 6

letadla musí platit

$$v_x t + \frac{u}{\sqrt{2}} t = s, \quad v_y t - \frac{u}{\sqrt{2}} t = 0,$$

odkud

$$\vec{v} = (278,8; 21,2) \text{ km.hod}^{-1}$$

6. Pohyb částice je dán rovnicemi $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos 2 \omega t$. Určete rovnici a tvar trajektorie.

Řešení:

Použitím vzorce pro kosinus dvojnásobného úhlu a vztahu $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ vyloučíme z těchto rovnic parametr t a dostaneme rovnici paraboly

$$y = \frac{2B}{A^2} x^2 - B, \quad -A \leq x \leq A.$$

Trajektorie (obr. 6) představuje zvláštní případ takzvaných Lissajousových [čti lisažusových] obrazců.

7. Jakou rychlosťí v_0 je nutno hodit těleso svisle dolů z výšky h , aby dopadlo o čas τ dříve než při volném pádu?

Řešení:

Při volném pádu z výšky h dopadne těleso za dobu $t = \sqrt{2h/g}$, při svislém vrhu dolů máme $h = v_0 t + gt^2/2$, odkud

$$t^2 + \frac{2v_0}{g} t - \frac{2h}{g} = 0, \quad t = -\frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}.$$

Z podmínky

$$-\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau$$

dostaneme výsledek

$$v_0 = g \tau \frac{\sqrt{8hg} - g\tau}{\sqrt{8hg} - 2g\tau}.$$

8. Těleso je vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí v_0 . Současně je z výšky h volně puštěno druhé těleso. Obě tělesa dopadnou na zem současně. Z jaké výšky bylo puštěno druhé těleso?

Řešení:

Volně padající těleso padalo po dobu $t = \sqrt{2h/g}$. Těleso vržené vzhůru dosáhlo výšky $h_1 = v_0^2/2g$ a letělo vzhůru a dolů po celkovou dobu $t = 2v_0/g$. Mají-li tělesa dopadnout současně, musí být druhé těleso puštěno s výšky

$$h = \frac{2v_0^2}{g} = 4 h_1.$$

9. Těleso je vrženo v čase $t = 0$ svisle vzhůru. Určitým místem ve výšce h prochází v čase t_1 směrem vzhůru a v čase t_2 směrem dolů. Určete výšku h a počáteční rychlosť v_0 .

Řešení:

Výška dosažená při svislém vrhu vzhůru v čase t_1 bude

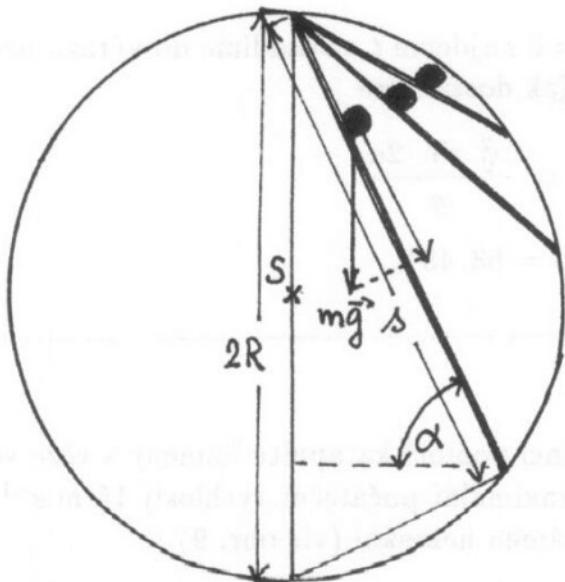
$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

V této výšce má těleso rychlosť $v = v_0 - gt_1$ a poletí tedy odtud do nejvyššího bodu a zpět do místa o výšce h po dobu

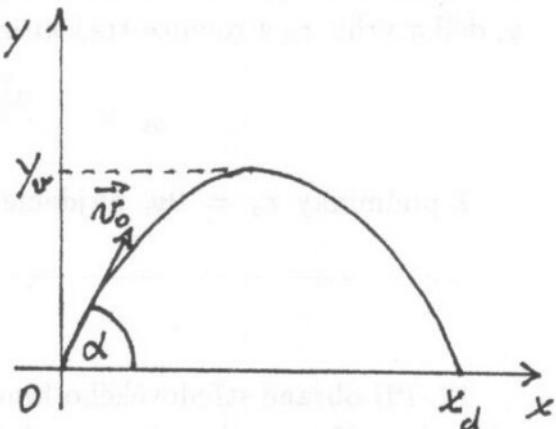
$$t_2 - t_1 = 2 \frac{v_0 - g t_1}{g}.$$

Z této rovnice snadno určíme v_0 a po dosazení do první rovnice výšku h :

$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}, \quad h = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$



obr. 7



obr. 8

10. Z horního konce svislého průměru kružnice vycházejí žlábky ve směru těliv kružnice. Do žlábků současně vložíme a necháme bez tření sklouznout kuličky. Dokažte, že všechny kuličky dosáhnou obvodu kružnice v témže okamžiku (obr. 7). Úlohu řešil v první polovině sedmnáctého století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu.

Řešení:

Kuličky budou konat rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $g \sin \alpha$. Dráha k obvodu kružnice podle Euklidovy věty je $s^2 = 2Rs \sin \alpha$, $s = 2R \sin \alpha$, odkud

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

nezávisle na úhlu α .

11. Pod jakým elevačním úhlem α je třeba vrhnout těleso v homogenním tělovém poli šíkmo vzhůru, aby se délka vrhu rovnala dvojnásobku výšky vrhu (obr. 8) ?

Řešení:

Jde o skládání rovnoměrného pohybu o rychlosti $v_0 \cos \alpha$ ve směru osy x a svislého vrhu vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 \sin \alpha$. Máme tedy

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t, \quad x = v_x t, \quad y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2,$$

odkud vyloučením t dostaneme rovnici trajektorie

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Výšku vrhu y_v určíme tak, že z podmínky $v_y = 0$ najdeme t a dosadíme do výrazu pro y , délku vrhu x_d z rovnice trajektorie při $y = 0$. Tak dostaneme

$$y_v = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \quad x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Z podmínky $x_d = 2y_v$ najdeme $\tan \alpha = 2$, tj. $\alpha = 63,43^\circ$.

12. Při obraně středověkého hradu vrhali obránci pomocí katapultu kameny s věže ve výšce $h = 25$ m nad terénem pod úhlem 30° s maximální počáteční rychlostí 15 m.s^{-1} . Kam až se mohl přiblížit útočník k vězi, aby ho kámen nezasáhl (viz obr. 9) ?

Řešení:

Z rovnice trajektorie šikmého vrhu z předchozího příkladu dostaneme kvadratickou rovnici

$$x_{min}^2 - \frac{\sin 2\alpha}{g} v_0^2 x_{min} - \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} h = 0,$$

jejímž řešením najdeme

$$(x_{min})_{1,2} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} + \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} h} = \\ = 9,93 + 30,96 = 40,89 \text{ m}.$$

Uvažovali jsme jen kladný kořen rovnice, který má fyzikální smysl, a použili hodnot $\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$. Útočník se může bezpečně přiblížit na vzdálenost 41 m.

13. Určete zrychlení těles a sílu napětí vláken v soustavách na obr. 10 a 11. Hmotnosti kladek a vláken považujte za nulové, tření vláken o kladky zanedbejte.

Řešení:

Na obr. 10 je tzv. Atwoodův padostroj, který umožňuje sledovat rovnoměrně zrychlený pohyb v tělovém poli se zrychlením mnohem menším než g . Jeho přesné řešení by vyžadovalo uvažovat i rotační pohyb kladky. Pokud její hmotnost zanedbáme a označíme zrychlení tělesa m_1 ve směru dolů jako a_1 , máme

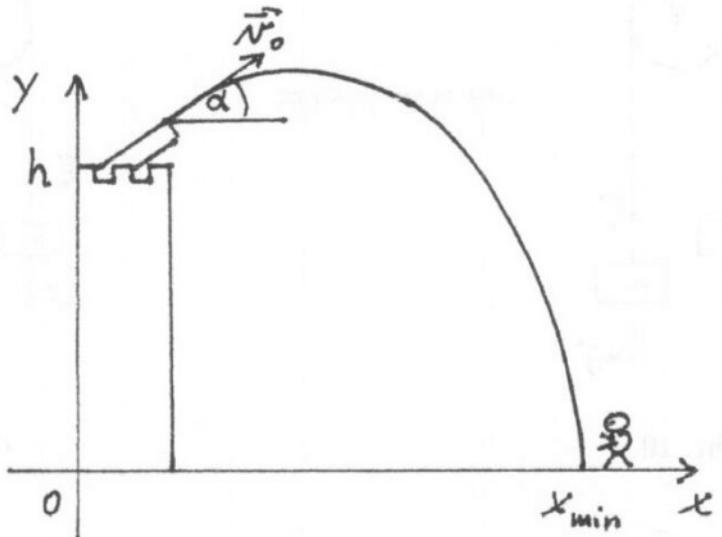
$$m_1 a_1 = m_1 g - F_n, \quad m_2 a_2 = m_2 g - F_n, \quad a_1 = -a_2 = a,$$

odkud řešením

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad F_n = m_1 (g - a) = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 2 \mu g.$$

Veličinu

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



obr. 9

nazýváme redukovanou hmotností.

Na obr. 11 je dvojitá kladka. Z pohybových rovnic

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_n, \quad m_2 a_2 = m_2 g - 2 F_n, \quad a_1 = -2 a_2 = a$$

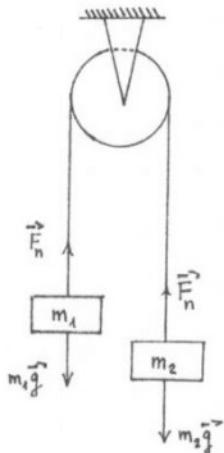
dostaneme

$$a = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g, \quad F_n = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

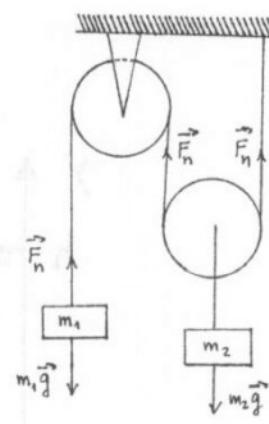
14. Přes kladku jako na obr. 10 je zavěšeno lano délky l , zanedbatelné hmotnosti a na jeho koncích ve stejné výšce visí dvě opice. Obě začnou současně šplhat vzhůru, přičemž druhá opice dvojnásobnou rychlostí (vzhledem k lanu) než první. První opice šplhá rychlostí v . Která z opic došplhá ke kladce dříve?

Řešení:

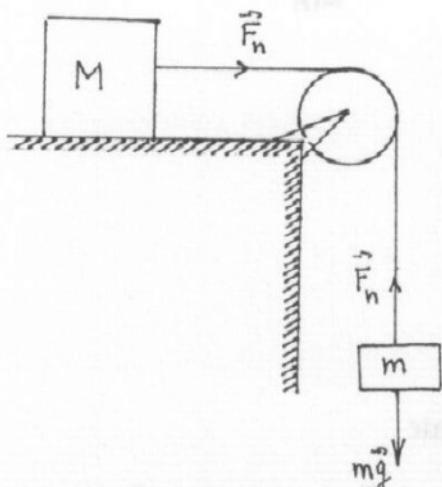
Záleží na vzájemné hmotnosti obou opic. Budou-li obě stejně těžké, bude soustava zůstávat v rovnováze, výsledné síly působící na každou opici budou nulové a napětí lana bude stále rovno mg . Obě opice budou stále ve stejné výšce a došplhají ke kladce současně za čas $l/3v$. Stejně tak by se obě dostaly ke kladce ve stejnou dobu, i kdyby jedna z opic nešplhala a pouze visela na laně, případně byla nahrazena závažím téže hmotnosti. Pokud by ovšem jedna z opic byla lehčí, pohybovalo by se lano se zrychlením a lehčí opice by dosáhla kladky dříve.



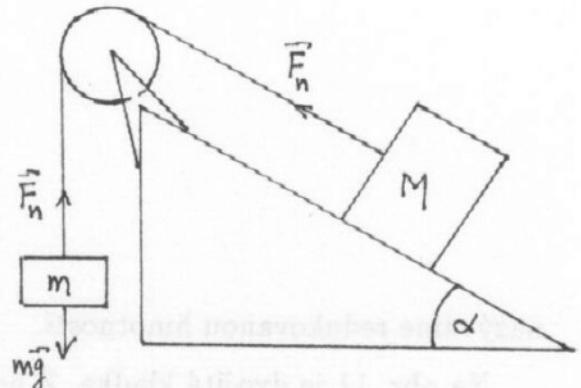
obr. 10



obr. 11



obr. 12



obr. 13

15. Určete zrychlení těles a sílu napětí vláken v soustavách na obr. 12 a 13. Tření těles o podložku zanedbejte.

Řešení:

Podle obr. 12 máme

$$M a = F_n, \quad m a = m g - F_n, \quad a = \frac{m g}{m + M}, \quad F_n = \frac{m M g}{m + M}.$$

Podle obr. 13 máme

$$M a = F_n - M g \sin \alpha, \quad m a = m g - F_n,$$

$$a = \frac{m - M \sin \alpha}{m + M} g, \quad F_n = \frac{m M (1 + \sin \alpha)}{m + M} g.$$

16. Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká těleso a pohybuje se přitom konstantní rychlostí. Tření mezi tělesem a rovinou je úměrné tlakové síle působící na rovinu a nezávisí na rychlosti tělesa. Určete koeficient smykového tření.

Řešení:

Protože se těleso pohybuje rovnoměrně přímočaře, jsou síly na něho působící vyrovnané. Platí tedy $m g \sin \alpha = f m g \cos \alpha$ a proto

$$f = \tan \alpha .$$

Tímto způsobem lze změřit koeficient smykového tření. Přitom měníme náklon roviny tak, až se rychlosť tělesa stane konstantní.

17. Automobil hmotnosti $m = 1\text{ t}$ pohybující se přímočaře rychlosťí $v = 100\text{ km.hod}^{-1}$ má být zabrdzen konstantní silou velikosti F na dráze $x_b = 20\text{ m}$. Určete tuto sílu.

Řešení:

Kinetická energie automobilu se musí rovnat práci síly \vec{F} na dráze x_b .

$$\frac{1}{2} m v^2 = F x_b , \quad F = \frac{m v^2}{2 x_b} = 19,3\text{ kN} .$$

Bylo by též možno zavést zpomalení automobilu $a = F/m$ a najít vztah mezi délkou brzdné dráhy a brzdicí silou z pohybového zákona pro rovnoměrně zpomalený pohyb.

18. Letadlo o hmotnosti $m = 10\text{ t}$ má vzletovou rychlosť $v = 288\text{ km.hod}^{-1}$. Motory vyvíjejí tažnou sílu velikosti $F = 20\text{ kN}$, z čehož 20 % připadá na překonávání tření a odporu prostředí. Určete délku startovací dráhy.

Řešení:

Zrychlení letadla je $a = 0,8 F/m = 1,6\text{ m.s}^{-2}$, startovací rychlosť bude dosaženo za dobu $t = v/a = 80/1,6 = 50\text{ s}$. Délka startovací dráhy je tedy

$$l = \frac{1}{2} a t^2 = 2\,000\text{ m} .$$

19. Čtyřmotorové letadlo letí rovnoměrně rychlosťí $v = 12\text{ km.min}^{-1}$. Každý motor má výkon $P = 800\text{ kW}$. Jak velká síla působí na letadlo proti směru jeho pohybu?

Řešení:

$$F = \frac{4 P}{v} = \frac{3,2 \cdot 10^6}{200} = 16\text{ kN} .$$

20. Raketa o hmotnosti 20 t dosáhne výšky 5 km za 10 s. Jaký je výkon jejích motorů?

Řešení:

$$P = \frac{m g h}{t} = 98 \text{ MW}.$$

Neuvažovali jsme změnu hmotnosti rakety během letu.

21. Těleso o hmotnosti 50 g pohybující se rychlostí 20 m.s^{-1} narazilo na pevnou stěnu pod úhlem 60° . Jakou průměrnou silou působilo těleso na stěnu, šlo-li o pružný ráz a trval-li náraz 0,1 s (viz obr. 14) ?

Řešení:

Impuls síly působící se strany stěny na těleso změnil složku jeho hybnosti kolmou ke stěně na opačnou; složka hybnosti rovnoběžná se stěnou se nezměnila. Máme tedy

$$\langle F \rangle \Delta t = \Delta p_{\perp} = 2 p \cos \alpha = 2 m v \cos 60^\circ,$$

takže střední síla, kterou těleso působí na stěnu (opačného směru než síla, kterou stěna působí na těleso) má velikost

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 10 \text{ N}.$$

22. Střela hmotnosti $m = 20 \text{ g}$ narazí rychlostí 600 m.s^{-1} na stěnu tloušťky $d = 12 \text{ cm}$ a vyletí z ní rychlostí 50 m.s^{-1} . Jaká průměrná síla působila na střelu uvnitř stěny?

Řešení:

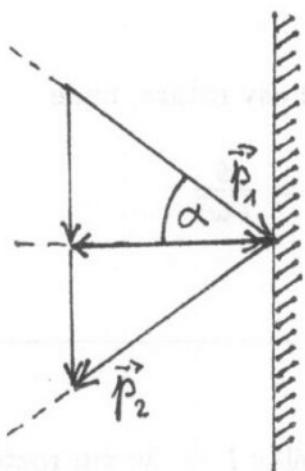
Platí

$$\langle F \rangle d = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2, \quad \langle F \rangle = \frac{m (v_1^2 - v_2^2)}{2 d} = 2,98 \text{ kN}.$$

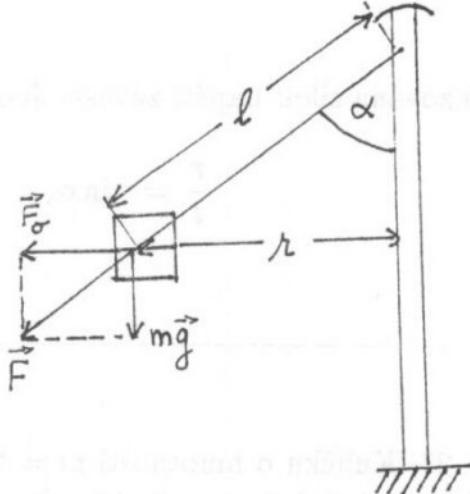
23. Za jakou dobu zvedne jeřáb, jehož motor má příkon 9 kW břemeno hmotnosti 12 t do výše 9 m, jestliže účinnost stroje je 60 % ?

Řešení:

Označíme-li příkon motoru jako P , jeho účinnost jako η , hmotnost tělesa m , výšku h



obr. 14



obr. 15

a dobu zdvihu t , máme

$$t = \frac{m g h}{\eta P} = 3,27 \text{ min.}$$

24. Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak o hmotnosti 300 t zvětšil svou rychlosť z 36 km.hod^{-1} na 54 km.hod^{-1} ?

Řešení:

$$A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 18,7 \text{ MJ.}$$

25. Určete nejmenší součinitel snykového tření f mezi koly automobilu a asfalem, aby vůz mohl projet (neklopenou) zatáčkou poloměru $r = 200 \text{ m}$ rychlostí 100 km.hod^{-1} .

Řešení:

Síla snykového tření musí plnit úlohu síly dostředivé, takže

$$f m g = \frac{m v^2}{r}, \quad f = \frac{v^2}{r g} = 0,39.$$

26. Sedadlo kolotoče na závěsu délky l se otáčí kolem svíslé osy úhlovou rychlostí ω . Určete úhel α , který svírá závěs s osou (obr. 15).

Řešení:

Výslednice tříhové síly a odstředivé síly, kterou sedadlo napíná závěs, musí být kom-

penzována silou napětí závěsu. Je-li r vzdálenost sedadla od osy rotace, bude

$$\frac{r}{l} = \sin \alpha, \quad \frac{r \omega^2}{g} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{g}{l \omega^2}.$$

27. Kuličku o hmotnosti $m = 100 \text{ g}$ zavěšenou na niti délky $l = 30 \text{ cm}$ roztočíme ve svislé rovině dvěma způsoby: a) s konstantní obvodovou rychlostí 210 cm.s^{-1} , b) tak, že jí udělíme v nejvyšším bodě dráhy tečnou rychlosť 210 cm.s^{-1} . Jakou silou bude taženo vlákno v nejvyšším a nejnižším bodě dráhy v těchto případech?

Řešení:

Na vlákno bude působit odstředivá síla velikosti $m v^2 / l$, která se bude sčítat se silou tříhovou. V prvním případě je odstředivá síla stejná v horním i dolním bodě dráhy, takže dostáváme

$$F_{1,2} = m \frac{v^2}{l} \mp m g = 10^{-1} \cdot \left(\frac{2,1^2}{0,3} \mp 9,81 \right) = 0,49 \text{ N}, \quad \text{resp. } 2,45 \text{ N}.$$

Ve druhém případě jde vlastně o kyvadlo, které koná úplné otáčky stále týmž směrem v tříhovém poli. Síla tahu vlákna v horním bodě bude táz jako v předchozím případě ($0,49 \text{ N}$). V dolní poloze dostaneme ze zákona zachování energie (označíme rychlosť v dolním bodě v_d)

$$\frac{m v_d^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + 2 m g l.$$

Tedy $v_d^2 = 4,02 \text{ m.s}^{-1}$, odkud vidíme, že vlákno bude taženo v dolní poloze silou $6,38 \text{ N}$.

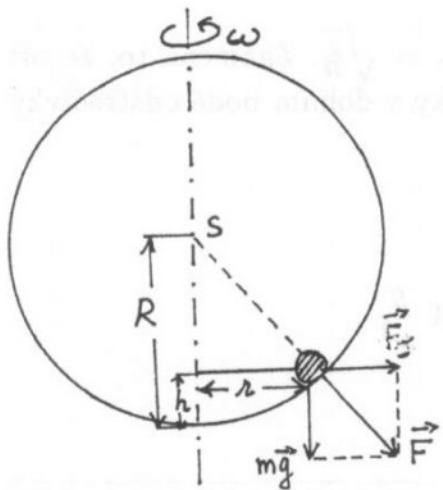
28. Kámen tíhy $G = 30 \text{ N}$ přivázaný na niti délky $l = 1 \text{ m}$ koná pohyb po kružnici ve svislé rovině. Najděte nejmenší úhlovou rychlosť, při které se nit přetrhne, trhá-li se při zatížení silou $F = 90 \text{ N}$.

Řešení:

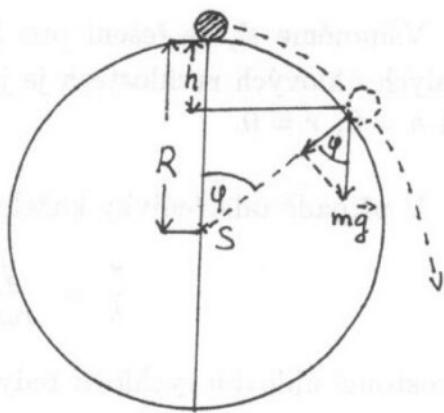
Přirovnáme napěťovou sílu vlákna v dolním bodě maximálnímu dovolenému zatížení.

$$m l \omega^2 + G = F, \quad \text{odkud} \quad \omega = \sqrt{\frac{F - G}{m l}} = 4,43 \text{ s}^{-1}.$$

29. Těleso hmotnosti m je připevněno na pružině a otáčí se ve vodorovné rovině konstantní úhlovou rychlosť ω kolem svislé osy, která prochází koncem pružiny. Nezatížená



obr. 16



obr. 17

pružina má délku l_0 , pružinová konstanta je k . Určete poloměr l kružnice, po které se těleso pohybuje.

Řešení:

Přirovnáme elastickou sílu úměrnou protažení pružiny sile dostředivé:

$$k(l - l_0) = m l \omega^2,$$

odkud

$$l = \frac{k l_0}{k - m \omega^2}.$$

30. Odstředivka má tvar koule o poloměru R a otáčí se kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlosťí ω . Určete výšku h do které vystoupí malá kulička hmotnosti m , vložíme-li ji do odstředivky (viz obr. 16). Jakou silou bude tlačit na stěnu odstředivky? Uvažujte, jaká situace vznikne v případě odstředivky kuželového tvaru.

Řešení:

Výslednice těhové a odstředivé síly, jíž kulička působí na stěnu odstředivky musí být vyrovnaná tlakovou silou stěny. Přitom máme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m r \omega^2}{m g} = \frac{r}{R - h}, \quad \text{odkud pro } r \neq 0 \quad h = R - \frac{g}{\omega^2}.$$

Pro sílu, s níž kulička tlačí na stěnu, dostaneme

$$F = \sqrt{m^2 g^2 + m^2 r^2 \omega^4} = m R \omega^2, \quad \text{neboť} \quad r = \sqrt{R^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}.$$

Všimněme si, že řešení pro h existuje jen při $\omega > \omega_{kr} = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Znamená to, že při malých úhlových rychlostech je jediná stabilní poloha kuličky v dolním bodě odstředivky při $h = 0$, $r = 0$.

V případě odstředivky kuželového tvaru je

$$\frac{r}{h} = \frac{g}{r\omega^2} = \text{konst}, \quad h = \text{konst} \frac{g}{\omega^2}.$$

S rostoucí úhlovou rychlostí tedy výška kuličky klesá.

31. Z nejvyššího místa dokonale hladké koule poloměru R pustíme volně hmotný bod hmotnosti m a necháme jej klouzat po povrchu koule působením těhové síly. V jaké výšce měřené od vrcholu koule opustí bod kouli a po jaké křivce se bude dále pohybovat (obr.17)?

Řešení:

Po poklesu o výšku h získá bod rychlosť o velikosti v . V okamžiku opuštění povrchu koule se musí dostředivá síla právě rovnat složce těhové síly kolmé k povrchu koule, takže hmotný bod přestane být k povrchu přitiskován. Potom platí

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2, \quad \frac{m v^2}{R} = m g \cos \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{R - h}{R},$$

odkud $h = R/3$. Bod tedy opustí kouli, spustí-li se o jednu třetinu jejího poloměru a bude se dále pohybovat po parabole, jako při šikmém vrhu.

32. Hmotný bod se pohybuje po hladké dráze, která leží ve svíslé rovině a přechází na kruhovou smyčku o poloměru R (obr. 18). Z jaké výšky h máme spustit hmotný bod s nulovou počáteční rychlosťí, aby se v nejvyšším bodě smyčky neodtrhl? Jakou rychlosť v_0 musíme udělit hmotnému bodu ve výšce h_0 ?

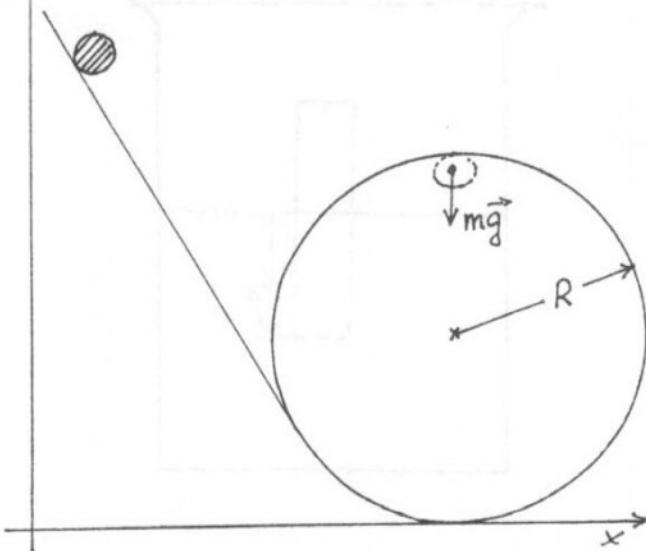
Řešení:

V nejvyšším bodě kruhové smyčky musí mít hmotný bod jednak odpovídající potenciální energii, jednak kinetickou energii odpovídající rychlosťi příslušející potřebnému dostředivému zrychlení. Proto

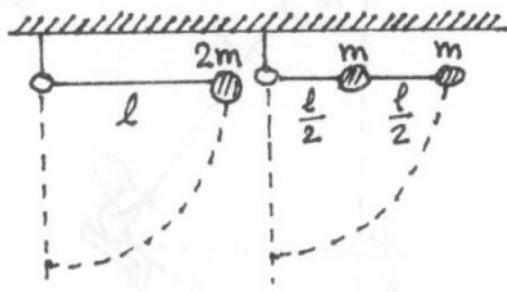
$$m g h = \frac{m v^2}{2} + 2 m g R, \quad \frac{m v^2}{R} = m g,$$

odkud $h \geq 5R/2$. Ve druhém případě

$$m g h_0 + \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + 2 m g R, \quad \frac{m v^2}{R} = m g,$$



obr. 18



obr. 19

odkud $v_0 \geq \sqrt{5gR - 2gh_0}$. Směr této rychlosti může být ovšem libovolný, hmotný bod můžeme postrčit jak nahoru tak dolů.

33. Na dvou nehmotných tyčích délky l jsou takto umístěny hmotné body (obr. 19): na první tyči bod o hmotnosti $2m$ ve vzdálenosti l od místa zavěšení tyče, na druhé tyči dva hmotné body o hmotnostech m , první ve vzdálenosti $l/2$, druhý ve vzdálenosti l . Obě tyče vychýlíme do vodorovné plohy a pustíme. Jaké budou mít konce tyčí rychlosti při průchodu dolní rovnovážnou polohou? Jaký bude poměr těchto rychlostí?

Řešení:

Pro první tyč máme

$$2mgl = \frac{1}{2}2mv_1^2, \quad v_1 = \sqrt{2gl}.$$

Pro druhou tyč

$$\frac{1}{2}mgl + mgl = \frac{1}{2}mv_{21}^2 + \frac{1}{2}mv_{22}^2, \quad v_{22} = l\omega = 2v_{21}, \quad \frac{3}{2}mgl = \frac{5}{8}mv_{22}^2,$$

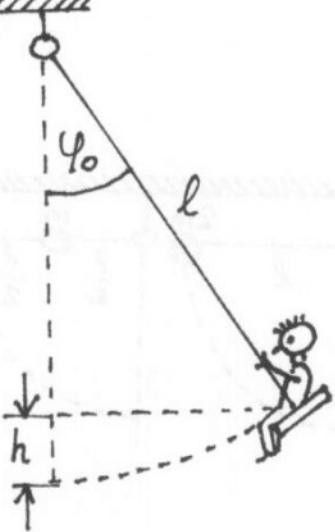
$$v_{22} = \sqrt{\frac{12}{5}gl}.$$

Poměr rychlostí konců obou tyčí bude tedy $v_{22}/v_1 = \sqrt{6/5} = 1,1$.

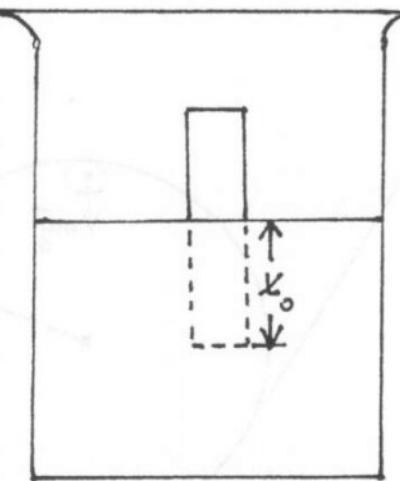
34. Určete maximální namáhání závěsu houpačky délky l , je-li zatížena celkovou hmotností m a na počátku vychýlena o úhel φ_0 (obr. 20). Jakou rychlosť a s jakým tečným zrychlením se přitom bude houpačka pohybovat?

Řešení:

Největší zatížení závěsu nastane při průchodu houpačky dolní polohou, kdy na závěs



obr. 20



obr. 21

bude působit plná tíha houpačky a maximální odstředivá síla. Při poklesu houpačky z počáteční vychýlené polohy do spodní polohy přemění se potenciální energie odpovídající výšce h na energii kinetickou. Považujeme-li houpačku za matematické kyvadlo, dostaneme pro úhlovou rychlosť v dolní poloze

$$\frac{1}{2} m l^2 \omega^2 = m g (l - l \cos \varphi_0), \quad \text{odkud} \quad \omega^2 = \frac{2g}{l} (1 - \cos \varphi_0).$$

Síla napínající závěs v této poloze bude tedy mít velikost

$$F = m g + m l \omega^2 = (3 - 2 \cos \varphi_0) m g.$$

V dolním bodě bude mít houpačka rychlosť $v = \sqrt{2g l (1 - \cos \varphi_0)}$ a nulové tečné zrychlení.

35. Hmotný bod koná harmonický pohyb. Jeho maximální rychlosť je 6 m.s^{-1} a maximální zrychlení 24 m.s^{-2} . Určete jeho amplitudu, úhlovou frekvenci, frekvenci a dobu kmitu.

Řešení:

Pohybuje-li se hmotný bod například na pružině podle zákona harmonických kmitů $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, bude jeho rychlosť záviset na čase jako $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ a zrychlení jako $a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$. Ze vztahů $v_{max} = A\omega$, $a_{max} = A\omega^2$ dostaneme

$$A = 1,5 \text{ m}, \quad \omega = 4 \text{ s}^{-1}, \quad f = 0,64 \text{ Hz}, \quad T = 1,57 \text{ s}.$$

36. Na desce konající harmonický pohyb podle zákona $x = A \sin \omega t$ ve vodorovném směru spočívá závaží o hmotnosti m . Koeficient smykového tření závaží o desku je

$f = 0.5$, $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$. Při jaké amplitudě začne závaží po desce klouzat?

Řešení:

Soustava souřadnic spojená s deskou je neinerciální a působí v ní setrvačná síla opačná k síle, která vyvolává kmity desky. Tato síla dosahuje maximální velikosti $F_{max} = m\omega^2 A$. Přirovnáme-li tuto sílu síle tření fm , dostaneme podmítku na amplitudu

$$A \geq \frac{f g}{\omega^2} = 5 \text{ cm}.$$

37. Mějme hustoměr ve tvaru válečku průměru d , který ve vertikální poloze plave v kapalině hustoty ρ (obr. 21). V rovnovážném stavu je ponořen do hloubky x_0 . Udělíme-li mu malý vertikální impuls, bude vykonávat harmonické kmity ve vertikálním směru. Najděte periodu těchto kmítů (tření v kapalině zanedbejte).

Řešení:

Na hustoměr bude působit jednak tíhová síla, jednak síla vztaková. V rovnováze budou tyto síly vyrovnané. Ponoříme-li hustoměr z rovnovážné polohy hlouběji o délku x , bude vztaková síla o velikosti $\rho g \Delta V = \rho g \pi d^2 x / 4$ vracet hustoměr do rovnovážné polohy. Máme tedy pohybovou rovnici pro vertikální složku síly

$$F = m a = -k x, \quad \text{kde} \quad k = \rho g \frac{\pi d^2}{4},$$

která vyvolává harmonické kmity s periodou

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}.$$

38. Jakou rychlosť je třeba udělit nějakému tělesu ve výšce $h = 500 \text{ km}$ nad zemským povrchem, aby se pohybovalo jako umělá družice Země po kruhové dráze?

Řešení:

Přirovnáme-li sílu dostředivou síle gravitační, dostaneme

$$\frac{m v^2}{R_Z + h} = \kappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2} = m \frac{g R_Z^2}{(R_Z + h)^2},$$

odkud

$$v = R_Z \sqrt{\frac{g}{R_Z + h}} = 7,62 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}.$$

39. Určete gravitační zrychlení ve výšce $h = 20$ km nad povrchem Země. V jaké výšce bude gravitační zrychlení právě čtyřikrát menší než na povrchu Země?

Řešení:

Podle Newtonova gravitačního zákona platí

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R_Z^2}{(R_Z + h)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{20}{6378}\right)^2} = 0,994.$$

Ve výšce 20 km nad zemským povrchem bude gravitační zrychlení $g_{20} = 0,994 g = 9,75 \text{ m.s}^{-2}$. Gravitační zrychlení klesá se čtvercem vzdálenosti od středu Země. Ve výšce $h = R_Z$ bude tedy čtyřikrát menší než na povrchu Země.

40. Určete výšku geostacionární dráhy a rychlosť družice na této dráze.

Řešení:

Geostacionární dráhou nazýváme kruhovou trajektorii umělých družic Země v rovníkové rovině, na níž je úhlová rychlosť družice rovna úhlové rychlosti zemské rotace. Taková družice se pak jakoby vznáší stále nad týmž místem nad rovníkem. Podobně jako v příkladu 38 určíme periodu oběhu družice

$$T = \frac{2\pi(R_Z + h)}{v} = \frac{2\pi}{R_Z} \sqrt{\frac{(R_Z + h)^3}{g}},$$

odkud

$$h = \sqrt[3]{\frac{g R_Z^2 T^2}{4\pi^2}} - R_Z = 35\,800 \text{ km}, \quad v = 3,34 \text{ km.s}^{-1}.$$

41. Určete hmotnost Země M_Z , hmotnost Slunce M_S a gravitační zrychlení na povrchu Slunce g_S , znáte-li gravitační konstantu κ , poloměr Země R_Z , gravitační zrychlení na povrchu Země (přibližně rovné těhovému zrychlení g), vzdálenost Země od Slunce ($r_S = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$), oběžnou dobu Země kolem Slunce T a poloměr Slunce ($R_S = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$). Zamyslete se nad otázkou, jak by bylo možno určit hmotnost Měsíce.

Řešení:

Přitažlivá gravitační síla na povrchu Země $m g = \kappa m M_Z / R_Z^2$, takže pro hmotnost Země máme

$$M_Z = \frac{g R_Z^2}{\kappa} = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Hmotnost Slunce určíme ze vztahu

$$\kappa \frac{M_Z M_S}{r_S^2} = M_Z r_S \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Tak dostaneme

$$M_S = \frac{4 \pi^2 r_S^3}{\kappa T^2} = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Pro gravitační zrychlení na povrchu Slunce pak máme

$$g_S = \kappa \frac{M_S}{R_S^2} = 274 \text{ m.s}^{-2}.$$

42. Za jakou dobu byste se propadli do Austrálie šachtou vedenou středem Země, jakou rychlostí byste prolétali středem Země a jaké byste měli přitom zážitky?

Řešení:

Pod povrchem Země ve vzdálenosti r od jejího středu na nás gravitačně nepůsobí celá hmota Země, nýbrž jen její část obsažená uvnitř koule poloměru r , a to jako bodová hmota soustředěná ve středu Země. Velikost této přitažlivé síly je tedy

$$F = \kappa \frac{m M}{r^2} = \kappa \frac{m}{r^2} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = m \kappa \frac{M_Z}{R_Z^3} r = m \frac{g}{R_Z} r$$

(hustotu Země ρ jsme určili dělením hmotnosti Země jejím objemem).

Tato síla je tedy úměrná vzdálenosti od středu Země a míří k tomuto středu. Srovnáním s elastickou silou $F = kr$ zjistíme, že $k = mg/R_Z$ a tato síla bude vyvolávat harmonické kmity s periodou

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{R_Z}{g}}.$$

Na druhou stranu zeměkoule se tedy propadneme za půl periody $\tau = \pi \sqrt{R_Z/g} = 2500$ s, tedy asi 42 minut. Na počátku pádu budeme mít vzhledem ke středu Země potenciální energii

$$E = \frac{1}{2} k R_Z^2 = \frac{1}{2} m g R_Z.$$

Při průletu středem Země přejde tato potenciální energie v kinetickou energii $\frac{1}{2}mv^2$, takže středem Země budeme prolétat první kosmickou rychlosť $v = \sqrt{g R_Z} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$. Naše zážitky budou přitom jistě otřesné.

43. O kolik jste těžší, když si lehnete? O kolik jste lehčí, když spadnete do škarpy?

Řešení:

Tato poněkud humorně formulovaná úloha předpokládá, že lehneme-li si na povrch Země, přiblíží se těžiště našeho těla ke středu Země asi o $h \approx 1 \text{ m}$ a tedy vzroste přitažlivá síla o

$$\Delta F = \kappa m M_Z \left[\frac{1}{R_Z^2} - \frac{1}{(R_Z + h)^2} \right] = m \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2} \left[1 - \left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^{-2} \right] =$$

$$m g \left[1 - 1 + 2 \frac{h}{R_Z} \right] = m g 2 \frac{h}{R_Z} \approx 3.10^{-7} m g .$$

Zde jsme použili přibližného vzorce

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha, \text{ je-li } \alpha \ll 1 .$$

Osoba o hmotnosti 100 kg, lehne-li si na zem, bude tedy lehčí asi o 30 mg.

Spadneme-li do škarpy hluboké 1 m, přestane na nás gravitačně působit obrovská část zeměkoule v podobě kulové vrstvy tloušťky 1 m (samořejmě zanedbáme-li nerovnosti zemského povrchu). Přitažlivá síla směrem do hloubky klesá úměrně vzdálenosti od středu Země r (viz předchozí příklad). Analogickým postupem tedy odhadneme, že v takovém případě budeme lehčí o mgh/R_Z .

44. Dva hmotné body m_1, m_2 se nacházejí na ose x , první v počátku, druhý ve vzdálenosti l od počátku. V okamžiku $t = 0$ se začnou k sobě přibližovat působením vzájemné konstantní přitažlivé síly \vec{F} . Kdy a kde se srazí a jakou rychlostí?

Řešení:

Obě tělesa se budou k sobě přibližovat rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $\ddot{a} = \vec{F}/m$, takže za dobu t urazí první těleso dráhu $s_1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m_1} t^2$, druhé $s_2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m_2} t^2$. V okamžiku srážky musí platit

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2} F t_{sr}^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = l ,$$

odkud pro okamžik srážky dostáváme

$$t_{sr} = \sqrt{\frac{2m_1 m_2 l}{(m_1 + m_2) F}} = \sqrt{\frac{2\mu l}{F}} ;$$

veličinu $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ nazýváme redukovanou hmotností.

Do srážky uběhnou tedy oba body vzdálenosti

$$s_{1sr} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad s_{2sr} = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} ,$$

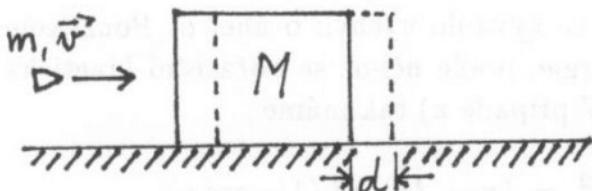
a podle očekávání se srazí v těžišti.

Jejich vzájemná rychlosť při srážce bude

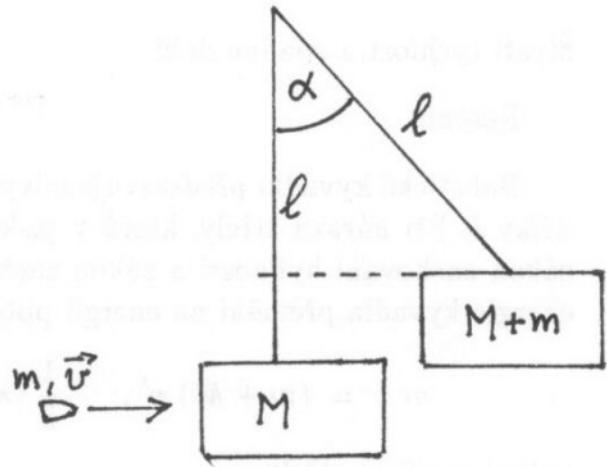
$$v_{sr} = v_{1sr} + v_{2sr} = F t_{sr} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2) F l}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{2 F l}{\mu}} .$$

Poznámka

Předpoklad o tom, že hmotné body na sebe působí stálé konstantní silou je ovšem pouze modelový, ve skutečnosti můžeme očekávat že síla mezi nimi působící při vzájemném přibližování poroste, v případě gravitačních sil nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti. Také v tomto případě se částice ovšem srazí v těžišti. Zpočátku se budou přibližovat velmi pomalu



obr. 22



obr.23

a při nekonečném sblížení by jejich vzájemná rychlosť byla rovněž nekonečná. V takovém případě nemůžeme považovat částice za hmotné body, ale musíme uvažovat reálná tělesa například kulového tvaru, jejichž středy se při srážce přiblíží na konečnou vzdálenost.

45. Střela hmotnosti $m = 10 \text{ g}$ byla vystřelena do dřevěného bloku hmotnosti $M = 2 \text{ kg}$ ležícího na vodorovné podložce a uvízla v něm. Přitom jej posunula o $d = 25 \text{ cm}$ (obr. 22). Součinitel tření bloku o podložku je $k = 0,2$. Určete práci sil tření, rychlosť střely před nárazem v a dobu pohybu bloku τ .

Řešení:

Po nárazu se blok se střelou dá do pohybu počáteční rychlostí v' . Kinetická energie této soustavy se spotřebuje na práci sil tření. Máme tedy rovnice

$$m v = (m + M) v' , \quad \frac{1}{2} (m + M) v'^2 = F d , \quad F = f (m + M) g .$$

Z poslední rovnice dostaneme $F = 3,94 \text{ N} \approx 4 \text{ N}$ a práce sil tření tedy představuje $Fd = 0,985 \text{ J} \approx 1 \text{ J}$. Z druhé rovnice pak najdeme $v' = 0,99 \text{ m.s}^{-1} \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$. Z první rovnice pak určíme rychlosť střely jako $v = \frac{m+M}{m} v' = 199 \text{ m.s}^{-1} \approx 200 \text{ m.s}^{-1}$. Přirovnáme-li impuls síly tření změně hybnosti soustavy, dostaneme

$$F \tau = (m + M) v' ,$$

odkud doba pohybu bloku $\tau = 0,505 \text{ s}$.

46. Určete rychlosť střely v balistickým kyvadlem (obr.23) a uvažujte tři případy: a) střela po nárazu uvízne v kyvadle, b) střela po nárazu odskočí zpět rychlosťí v_0 , c) střela

ztratí rychlosť a spadne dolô.

Řešení:

Balistické kyvadlo představuje obvykle dřevěnou bedničku s pískem zavěšenou na laně délky l . Při nárazu střely, která v písce uvízne, se kyvadlo vychýlí o úhel α . Použijeme zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie, podle něhož se počáteční kinetická energie kyvadla přemění na energii potenciální. V případě a) tak máme

$$m v = (m + M) v' , \quad \frac{1}{2} (m + M) v'^2 = (m + M) g l (1 - \cos \alpha) ,$$

odkud rychlosť střely

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)} .$$

Ve druhých dvou případech snadno určíme

$$v = \frac{M}{m} \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)} - v_0 , \quad v = \frac{M}{m} \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha)} .$$

47. Dvě loďky plují proti sobě rovnoběžným směrem. Když se setkají, vymění si navzájem pytle (zřejmě pašovaného zboží) o stejných hmotnostech $m = 50 \text{ kg}$. Následkem toho se první loďka zastaví a druhá se pohybuje dál rychlosťí $v = 8,5 \text{ m.s}^{-1}$. Jaké jsou rychlosťi loděk v_1, v_2 před výměnou pytlů, jsou-li hmotnosti loděk s nákladem $m_1 = 500 \text{ kg}$ a $m_2 = 1000 \text{ kg}$?

Řešení:

Ze zákona zachování hybnosti pro každou z loděk dostáváme (znaménka rychlosťí ve směru původního pohybu každé loděky bereme kladná)

$$m_1 v_1 - m v_1 - m v_2 = 0 , \quad m_2 v_2 - m v_2 - m v_1 = m_2 v .$$

Odtud dostáváme

$$v_2 = \frac{m_1 - m}{m} v_1 = 9 v_1 , \quad v_1 = \frac{m m_2}{m_1 m_2 - m(m_1 + m_2)} v = 1 \text{ m.s}^{-1} , \quad v_2 = 9 \text{ m.s}^{-1} .$$

48. Tři loděky stejné hmotnosti M jedou za sebou stejnou rychlosťí v . Ze střední loděky byla rychlosť u vzhledem k této lodce vyhozena ve stejnou dobu dvě závaží též hmotnosti m do přední a do zadní loděky. Jaké jsou rychlosťi loděk v_1, v_2, v_3 po přehození závaží?

Řešení:

Z rovnic

$$M v + m(v + u) = (M + m)v_1$$

$$M v - m(v + u) - m(v - u) = (M - 2m)v_2$$

$$M v + m(v - u) = (M + m)v_3$$

dostáváme

$$v_{1,3} = \frac{Mv + m(v \pm u)}{M + m}, \quad v_2 = v.$$

49. Granát, který byl v klidu, se při explozi rozdělil na dvě části o hmotnostech m_1 a $m_2 = 4m_1$. Určete celkovou uvolněnou kinetickou energii, víte-li, že část m_1 odletěla s kinetickou energií $T_1 = 100$ J.

Řešení:

Pro hybnosti obou částí musí platit $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ a oba vektory musí mířit na opačné strany. Pro velikosti hybností platí $p_2 = p_1$. Je výhodné vyjadřovat kinetickou energii jako $T = p^2/2m$; potom máme

$$T = T_1 + T_2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} = T_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = 125 \text{ J}.$$

Vedle toho se ovšem může uvolnit i energie zvuková, zářivá a další.

50. Prozkoumejte přímý pružný ráz dvou koulí.

Řešení:

Nechť se koule hmotnosti m_1 pohybuje rychlostí \vec{v}_1 a koule o hmotnosti m_2 na téže přímce rychlostí \vec{v}_2 . Označme rychlosti koulí po srážce jako \vec{u}_1 , \vec{u}_2 . Považujme v_1 , v_2 za složky rychlostí obou koulí před srážkou a zvolme například směr pohybu první koule před srážkou za kladný. Pohybují-li se koule proti sobě, bude tedy $v_2 < 0$, pohybují-li se týmž směrem, bude $v_2 > 0$. Ze zákonů zachování hybnosti a energie dostaneme rovnice

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2.$$

Řešíme-li je jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých u_1 , u_2 , dostaneme

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Odtud můžeme dostat odpověď na výsledek libovolné situace při pružném přímém rázu. Tak například jsou-li hmotnosti obou koulí stejné, plyne odtud $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$ a koule si při srážce prostě vymění rychlosti. Je-li například $m_1 > m_2$, bude $u_1 > 0$ za podmínky

$$v_1 > -\frac{2m_1}{m_1 - m_2} v_2.$$

51. Dvě koule o hmotnostech $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ a $m_2 = 1 \text{ kg}$ pohybující se proti sobě rychlostmi $v_1 = 5 \text{ m.s}^{-1}$, a $v_2 = 8 \text{ m.s}^{-1}$ se nepružně srazí. Určete, jaká část kinetické energie této soustavy přejde na energii jiného druhu (tepelnou apod.).

Řešení:

Ze zákona zachování hybnosti $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$ určíme rychlosť spojených koulí po rázu:

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

(nepřekvapuje nás, že je to rychlosť těžiště soustavy). Pro rozdíl kinetických energií před a po srážce dostaváme

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} = 1,5 \text{ J.}$$

Tato energie se přemění na jiné formy než mechanickou kinetickou energii.

52. Dvě koule o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují proti sobě a srazí se. Srážka je dokonale nepružná. Před srážkou byly kinetické energie koulí v poměru $T_1/T_2 = 20$. Za jaké podmínky se budou koule po srážce pohybovat ve směru původního pohybu druhé koule?

Řešení:

Považujme v_1, v_2, v za složky rychlosťí, kladné ve směru pohybu první koule. Z rovnic

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 20 \cdot \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

dostaneme

$$v_1 = - \sqrt{\frac{20 m_2}{m_1}} v_2, \quad \left(-m_1 \sqrt{\frac{20 m_2}{m_1}} + m_2 \right) v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

odkud

$$v = \frac{m_2 - \sqrt{20 m_1 m_2}}{m_1 + m_2} v_2.$$

Aby rychlosti v a v_2 měly stejné znamení, musí být $m_2/m_1 > 20$.

53. Určete kinetickou energii obruče, plného válce a koule, které se valí po rovině bez klouzání postupnou rychlosťí v .

Řešení:

Kinetická energie bude součtem kinetické energie postupného a rotačního pohybu. Označíme-li m hmotnost, I moment setrvačnosti a r poloměr uvedených těles, dostaneme

pro ně

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2}.$$

Dosadíme-li příslušné momenty setrvačnosti, dostaneme pro

$$\text{obruč } T = m v^2, \quad \text{válec } T = \frac{3}{4} m v^2, \quad \text{kouli } T = \frac{7}{10} M v^2.$$

54. Určete rychlosť postupného pohybu válce a koule, ktoré se začnou valiť na naklonené rovině o sklonu α a klesnou pri tom o výšku h .

Řešení:

Ze zákona zachování energie máme s použitím výsledku příkladu 53

$$\text{pro válec } m g h = \frac{3}{4} m v^2, \quad v = \sqrt{\frac{4}{3} h g},$$

$$\text{pro kouli } m g h = \frac{7}{10} m v^2, \quad v = \sqrt{\frac{10}{7} h g}.$$

Používáme-li zákon zachování energie, je třeba si uvědomit vliv sil tření. Valí-li se válec či koule bez prokluzování, znamená to, že povrch musí být drsný a tedy musí existovat značná síla smykového tření. Tato síla také vyvolává otáčející moment vzhledem k ose procházející těžištěm tělesa. Přitom ovšem nekoná práci, protože se těleso nesmýká a nedochází k přeměně mechanické energie na tepelnou. Ztráty mechanické energie vyvolané valivým odporem zanedbáváme.

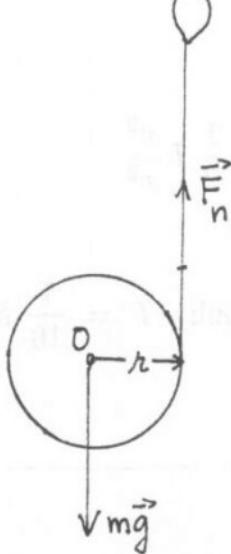
55. Určete moment setrvačnosti tyčky délky l a hmotnosti m rotující kolem osy
a) procházející jejím koncem, b) procházející ve vzdálenosti $l/4$ od konce.

Řešení:

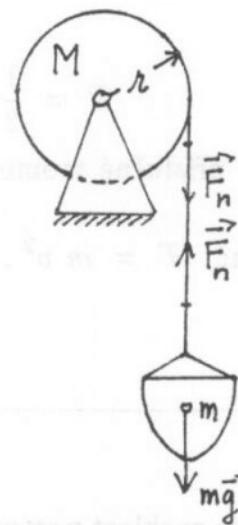
Podle Steinerovy věty máme

$$\text{a)} \quad I' = I + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2,$$

$$\text{b)} \quad I' = I + m \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{16} m l^2 = \frac{7}{48} m l^2.$$



obr. 24



obr. 25

56. Určete s jakým zrychlením bude klesat k zemi (a opět stoupat) hračka zvaná jojo a jakou silou je napínáno vlákno (obr. 24).

Řešení:

Napíšeme pohybové rovnice pro postupný pohyb osy joja (považovaného za válec) procházející těžištěm a pro rotaci kolem této osy:

$$m a = m g - F_n, \quad I \varepsilon = F_n r, \quad \varepsilon = \frac{a}{r},$$

odkud řešením

$$a = \frac{2}{3} g, \quad F_n = \frac{1}{3} m g.$$

To ovšem platí i pro pohyb joja vzhůru po odrazu v nejnižším bodě.

57. Určete jakou rychlosť bude klesat vědro s vodou o hmotnosti m , jehož závěs se odvíjí z rumpálu hmotnosti M a poloměru r (obr. 25).

Řešení:

Podobně jako v předchozím příkladě napíšeme rovnice pro pohyb vědra a pohyb rumpálu:

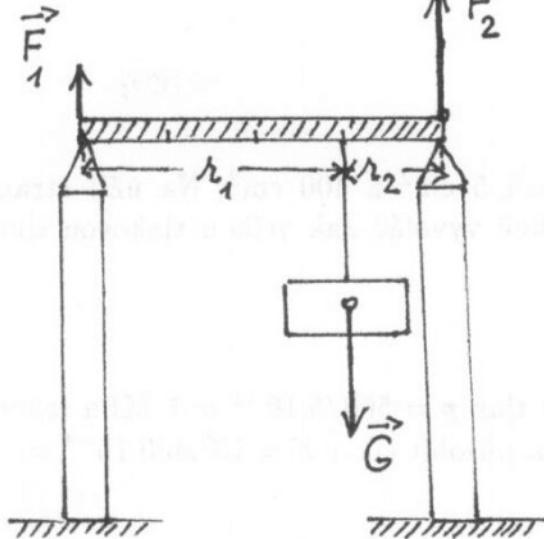
$$m a = m g - F_n, \quad I \varepsilon = F_n r, \quad \varepsilon = \frac{a}{r}, \quad I = \frac{1}{2} M r^2,$$

z nichž dostaneme

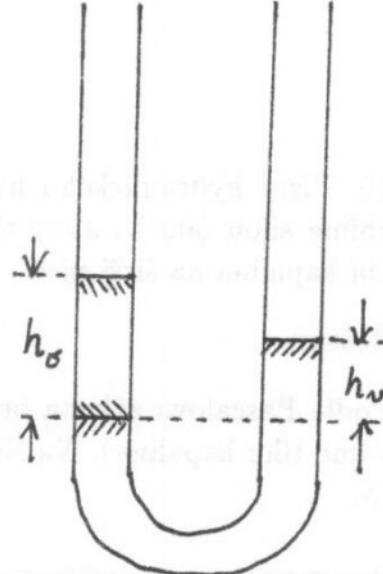
$$a = \frac{2 m g}{2 m + M}, \quad F_n = \frac{m M g}{2 m + M}.$$

Vědro se tedy pohybuje s konstantním zrychlením (rovnoměrně zrychlený pohyb) a jeho rychlosť roste s časem jako

$$v = a t = \frac{2 m g}{2 m + M} t.$$



obr. 26



obr. 27

58. Na vodorovné tyče délky 2 m podepřené na obou koncích je pověšeno ve vzdálenosti 0,5 m od jednoho konce tyče břemeno tíhy $G = 1 \text{ kN}$. Jaké síly působí na koncích tyče (obr. 26) ?

Řešení:

Ve statické rovnováze musí být vyrovnaný jednak všechny síly, jednak momenty sil. Přeneseme-li síly, kterými na tyč působí koncové opory do působiště tíhy břemene, dostaneme

$$F_1 + F_2 = G, \quad F_1 r_1 = F_2 r_2,$$

odkud snadno dostaneme $F_1 = 250 \text{ kN}$, $F_2 = 750 \text{ kN}$.

59. Kovová tyč délky $l_0 = 1 \text{ m}$ a průřezu $S = 4 \text{ cm}^2$ je deformována tahem silou $F = 800 \text{ N}$. Přitom se prodlouží o 10^{-5} m . Určete Youngův modul materiálu tyče. Z jakého kovu by mohla tyč být?

Řešení:

Podle Hookeova zákona je relativní prodloužení (zkrácení) tyče úměrné mechanickému napětí:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{\Delta S},$$

kde koeficient E nazýváme Youngovým modulem. Potom najdeme

$$E = \frac{F l_0}{\Delta S \Delta l} = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}.$$

Tyč je zřejmě z oceli.

60. Písty hydraulického lisu mají obsah průřezů 5 cm^2 a 400 cm^2 . Na užší straně působí silou 500 N . Jaký tlak tato síla v kapalině vyvolá? Jak velkou tlakovou silou působí kapalina na širší píst?

Řešení:

Podle Pascalova zákona bude v kapalině všude tlak $p = 500/5 \cdot 10^{-4} = 1 \text{ MPa}$ (zane-
dbáváme tíhu kapaliny). Na širší píst bude kapalina působit silou $F = 10^6 \cdot 400 \cdot 10^{-4} = 40 \text{ kN}$.

61. V jednom rameni spojených nádob je voda, ve druhém olej. Výška vody nad spo-
lečným rozhraním obou kapalin je $4,5 \text{ cm}$, oleje $5,0 \text{ cm}$ (obr. 27). Určete hustotu oleje.

Řešení:

Hydrostatický tlak oleje a vody na společném rozhraní se vyrovnávají:

$$\rho_o g h_o = \rho_v g h_v ,$$

odkud $\rho_o = \rho_v \cdot h_v / h_o = 1000 \cdot 0,045 / 0,05 = 900 \text{ kg.m}^{-3}$.

62. Na plnou kouli působí ve vzduchu tíhová síla 390 N , na tutéž kouli ponořenou do vody síla 340 N . Jaký je objem koule a hustota látky, z níž je koule zhotovena? Co je to asi za látku?

Řešení:

Tíhová síla působící na kouli je $mg = 390 \text{ N}$, hmotnost koule je tedy $m = 390 / 9,81 = 39,8 \text{ kg}$. Ve vodě je koule nadlehčována silou $390 - 340 = 50 \text{ N}$, takže podle Archimedova zákona $\rho_v \cdot V \cdot g = 50$, kde V je objem koule a ρ_v hustota vody. Objem koule je $V = \frac{50}{1000 \cdot 9,81} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, tedy $5,1$ kubických decimetrů. Hustota látky, z níž je koule zhotovena je $\rho_k = m/V = 39,8 / 5,1 \cdot 10^{-3} = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$. Koule je tedy nejspíš ze železa.

63. Pevné těleso bylo zváženo na vzduchu a pod vodou. V prvním případě vážilo 8 kg , ve druhém 6 kg . Pak plavalo v neznámé kapalině a $0,29$ jeho objemu bylo ponořeno. Jaká je to kapalina?

Řešení:

Z Archimedova zákona okamžitě dostáváme objem tělesa jako $V = (8 - 6) / 1000 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Jeho hustota je tedy $\rho = m/V = 8 / 2 \cdot 10^{-3} = 4000 \text{ kg.m}^{-3}$ (viz předchozí příklad). Hmotnost tělesa (8 kg) musí odpovídat hmotnosti neznámé kapaliny o objemu

ponořené části tělesa, tedy $m = 0,29 \rho V$. Proto hustota kapaliny

$$\rho_k = \frac{m}{0,29 V} = \frac{8}{0,29 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 13\,790 \text{ kg.m}^{-3}.$$

Kapalina je zřejmě rtuť; co jiného?

64. Z trysky vodotrysku s průřezem $1,5 \text{ cm}^2$ vystřikuje voda rychlostí 24 m.s^{-1} . Jak velká je rychlosť proudu v přívodním potrubí, jehož průřez má obsah 18 cm^2 ?

Řešení:

Z rovnice kontinuity dostaneme

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = 24 \cdot \frac{1,5}{18} = 2 \text{ m.s}^{-1}.$$

Voda proudí rychlosťí 2 metry za sekundu.

65. Jak velkou rychlosťí vytéká voda z nádoby otvorem v hloubce 80 cm?

Řešení:

$$v = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,8} = 3,96 \text{ m.s}^{-1}.$$

Voda vytéká rychlosťí přibližně 4 metry za sekundu.

66. Jak velkou rychlosťí proudí voda vodorovnou trubicí s průřezem $S_1 = 15 \text{ cm}^2$, jestliže ve zúženém místě o průřezu $S_2 = 5 \text{ cm}^2$ se zmenší tlak o hodnotu 500 Pa?

Řešení:

Podle Bernoulliovovy rovnice a rovnice kontinuity dostaneme pro změnu tlaku

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right),$$

odkud

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p S_2^2}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}} = 0,35 \text{ m.s}^{-1}.$$

Voda proudí trubicí rychlosťí 35 centimetrů za sekundu.

67. Jaká je vlnová délka vlnění, které má frekvenci 400 Hz a šíří se rychlostí 300 m.s^{-1} ? Co by to mohlo být za vlnění?

Řešení:

Označíme-li vlnovou délku jako λ , frekvenci jako f a fázovou rychlosť šírení jako v , platí $v = \lambda f$. Proto v našem případě $\lambda = v/f = 300/400 = 0,75 \text{ m}$. Mohlo by jít o zvukovou vlnu (vzhledem k rychlosť šírení) o frekvenci 400 Hz, tedy třeba o zvuk automobilové houkačky.

68. Postupná vlna je popsána rovnicí $y = 0,1 \sin 2 \pi(5t - 3,3x)$ (v jednotkách soustavy SI). Určete amplitudu výchylky, periodu, frekvenci, vlnovou délku a fázovou rychlosť vlnění.

Řešení:

Přirovnáme uvedený výraz k obecné závislosti výchylky vlnění na čase a dráze:

$$y = A \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

odkud snadno určíme $A = 0,1 \text{ m}$, $T = 0,2 \text{ s}$, $f = 5 \text{ Hz}$, $\lambda = 1/3,3 = 0,3 \text{ m}$, $v = \lambda/T = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$.

ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

Užitečné vzorce

Coulombův zákon: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$
permitivita vakua $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, permeabilita vakua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$,

elementární náboj: $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

kapacita kondenzátoru: $C = \frac{Q}{U}$, kapacita deskového kondenzátoru $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d}$
(S je plocha desek, d vzdálenost mezi nimi a ϵ_r relativní permitivita prostředí mezi deskami)

velikost intenzity elektrického pole v deskovém kondenzátoru: $E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$

kapacita kondenzátorů v sériovém zapojení: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \dots$

kapacita kondenzátorů v paralelním zapojení: $C = C_1 + C_2 \dots$

Ohmův zákon: $R = \frac{U}{I}$, pro uzavřený obvod $R = \frac{\mathcal{E}}{R+R_i}$,

kde U je svorkové napětí, \mathcal{E} elektromotorické napětí, R_i vnitřní odpor zdroje

Kirchhoffovy zákony: pro uzly $I_1 + I_2 + \dots = 0$, pro smyčky $\mathcal{E} = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots$

odpor homogenního vodiče: $R = \rho \frac{l}{S}$

(l je délka, S průřez vodiče, ρ rezistivita, $\sigma = 1/\rho$ konduktivita látky)

odpory v sériovém zapojení: $R = R_1 + R_2 \dots$

odpory v paralelním zapojení: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \dots$

výkon stejnosměrného proudu: $P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

indukované elektromotorické napětí: $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$,

kde $\Phi = LI$ je magnetický indukční tok a L vlastní indukčnost cívky

vlastní indukčnost cívky: $L = \mu_r \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$, kde

S je průřez cívky, l její délka, N počet závitů a μ_r relativní permeabilita jádra

velikost magnetické indukce v cívce (bez jádra): $B = \frac{\mu_0 NI}{l}$

impedance: $Z = \frac{U_0}{I_0}$, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$,

(U_0 , I_0 jsou amplitudové nebo efektivní hodnoty střídavého napětí a proudu)

o úhlové frekvenci ω)

Thomsonův vzorec: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $\lambda = cT$

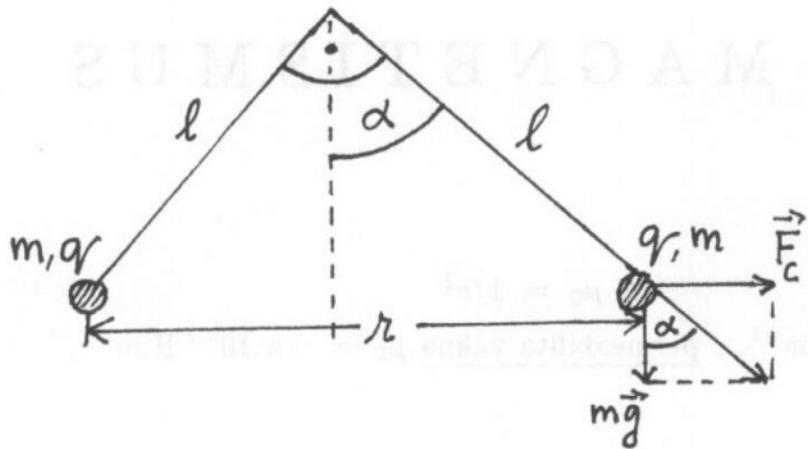
Lorentzova síla působící v elektrickém poli o intenzitě \vec{E} a magnetickém poli

o magnetické indukci \vec{B} na náboj q pohybující se rychlostí \vec{v} :

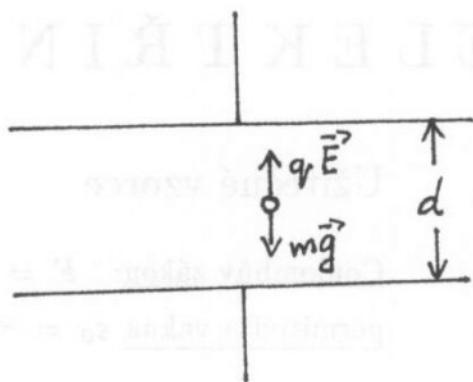
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

cyklotronová frekvence: $\omega_c = \frac{q}{m} B$, cyklotronový poloměr: $R = \frac{m v_k}{q B}$,

(v_k je složka rychlosti kolmá k vektoru magnetické indukce \vec{B})



obr. 1



obr. 2

1. Dvě stejně kuličky hmotnosti $m = 1 \text{ g}$ visí na dvou nitích délky $l = 1 \text{ m}$ zavěšených v témž bodě. Nabijeme-li kuličky souhlasnými náboji stejné velikosti q (například tak, že nabijeme jednu z nich a necháme ji dotknout se druhé kuličky), rozestoupí se tak, že niti budou svírat pravý úhel (obr. 1). Určete náboj q .

Řešení:

Na kuličku působí ve svislém směru těhová síla, ve vodorovném směru síla Coulombova. Nit svírá se svislým směrem úhel α , pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \frac{1}{m g} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Vzdálenost r vyjádříme s použitím Pythagorovy věty pomocí délky niti l jako $r^2 = 2l^2$ a dosazením do předchozího vztahu určíme náboj jako

$$q = \sqrt{8 \pi \epsilon_0 l^2 m g} = \sqrt{8 \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 1,5 \mu\text{C}.$$

2. Určete jakou silou se přitahují dva nesouhlasné náboje ve vzdálenosti 1 m, je-li jejich velikost a) e , b) 1 C ?

Řešení:

Podle Coulombova zákona máme a) $F = 2,30 \cdot 10^{-28} \text{ N}$, b) $F = 0,899 \cdot 10^{10} \text{ N}$.

3. Jak velký je elektrický náboj dvou stejných vodivých kuliček, které se po dotyku odpuzují silou $3 \cdot 10^{-2}$ N ve vzdálenosti $r = 2$ cm mezi středy?

Řešení:

Podle Coulombova zákona

$$q = r \sqrt{4 \pi \epsilon_0 F} = 3,65 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

4. Na dvou stejných vodních kapkách je po jednom přebytečném elektronu, přičemž síla elektrického odpuzování je stejně velká jako síla gravitačního přitahování mezi nimi. Určete poloměr kapek.

Řešení:

Přirovnáme sílu Coulombovu a sílu gravitační:

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \kappa \frac{m^2}{r^2}, \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

neboli

$$\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} = \kappa \frac{16}{9} \pi^2 \rho^2 r^6.$$

Potom

$$r^6 = \frac{9 e^2}{64 \pi^3 \epsilon_0 \kappa \rho^2} = \frac{9 \cdot (1,6)^2 \cdot 10^{-38}}{64 \cdot \pi^3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6} = 0,1969 \cdot 10^{-24},$$

$$r = \sqrt[6]{0,1969} \cdot 10^{-4} = \sqrt[3]{0,4437} \cdot 10^{-4} = \sqrt[3]{443,7} \cdot 10^{-5} = 7,63 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Kapičky mají poloměr $7,63 \cdot 10^{-5}$ m.

5. Mezi dvěma vodorovnými deskami kondenzátoru nabitého na napětí 400 V se volně vznáší olejová kapička hmotnosti $m = 6,4 \cdot 10^{-16}$ kg. Vzdálenost desek d je 1 cm (obr. 2). Jaký nese kapička elektrický náboj?

Řešení:

Tíha kapičky je vyrovnaná elektrickou silou. Máme tedy

$$m g = q E, \quad E = \frac{U}{d}, \quad q = \frac{m g d}{U} = \frac{6,4 \cdot 10^{-16} \cdot 9,81 \cdot 10^{-2}}{400} = 1,57 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Kapička zřejmě nese jeden elementární náboj.

6. Kolik elektronů tvoří náboj kapičky o hmotnosti 10^{-11} g, jestliže je udržována v rovnováze v rovinném kondenzátoru, jehož desky jsou ve vzdálenosti 5 mm a jsou-li nabity na potenciální rozdíl 76,5 V ?

Řešení:

Podobně jako v předchozím příkladě

$$q = \frac{m \cdot g \cdot d}{U} = \frac{10^{-14} \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{76,5} = 6,41 \cdot 10^{-18},$$

náboj elektronu má velikost $1,602 \cdot 10^{-19}$ C, takže

$$n = \frac{6,41 \cdot 10^{-18}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 40.$$

Kapička nese 40 elektronů.

7. Jakou plochu by musely mít elektrody deskového kondenzátoru o vzdálenosti 1 mm a kapacitě 1 F ?

Řešení:

Podle vztahu pro kapacitu deskového kondenzátoru

$$S = \frac{C \cdot d}{\epsilon_0} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 1,13 \cdot 10^8 \text{ m}^2.$$

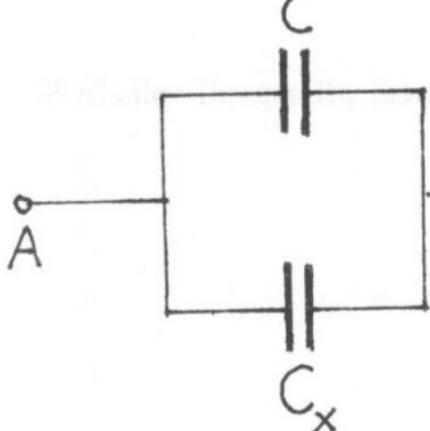
Desky kondenzátoru by musely mít plochu 113 km^2 .

8. Ke zdroji napětí $U = 30 \text{ V}$ jsou připojeny v sérii kondenzátory o kapacitě $C_1 = 12 \mu\text{F}$ a $C_2 = 24 \mu\text{F}$. Určete výslednou kapacitu, náboje na deskách obou kondenzátorů a poměr napětí na těchto kondenzátořech.

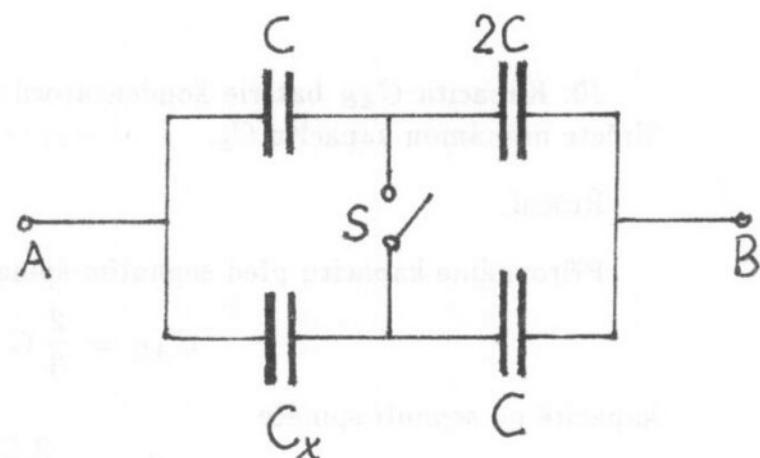
Řešení:

$$C = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right)^{-1} = 8 \mu\text{F}, \quad Q = C \cdot U = 240 \mu\text{C},$$

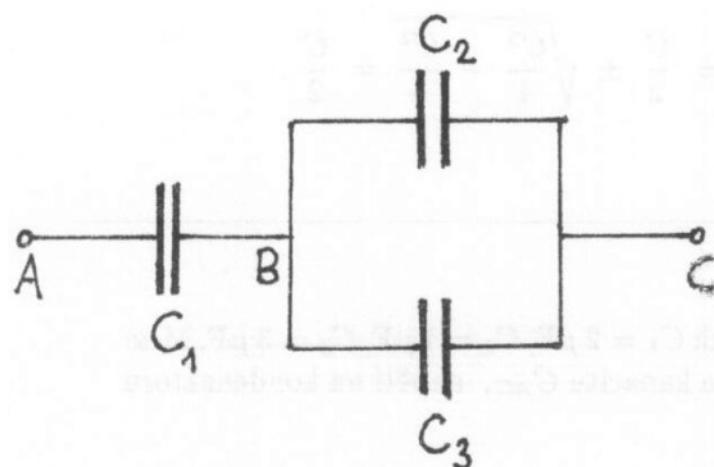
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2}, \quad U_1 = 20 \text{ V}, \quad U_2 = 10 \text{ V}.$$



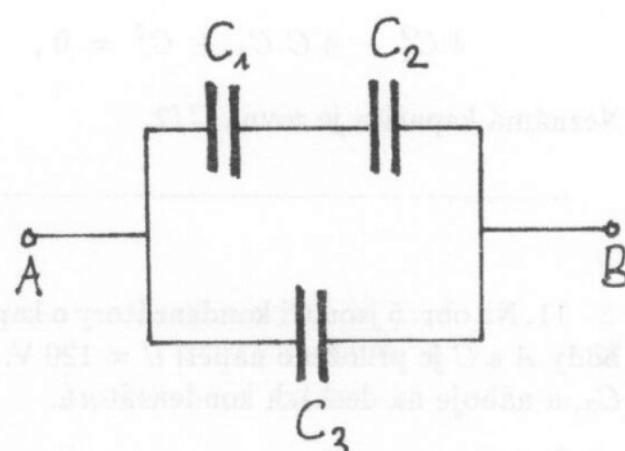
obr. 3



obr. 4



obr. 5



obr. 6

9. Ke kondenzátoru o kapacitě $C = 1,7 \mu F$, který je nabit na napětí $U = 100 V$ byl paralelně připojen kondenzátor C_x (obr. 3). Na obou kondenzátorech bylo pak napětí $U' = 68 V$. Určete kapacitu C_x .

Řešení:

Náboj na kondenzátorech se nezměnil. Musí tedy platit

$$Q = C U = (C + C_x) U', \quad C_x = \frac{C (U - U')}{U'} = \frac{1,7 \cdot 32}{68} = 0,80 \mu F.$$

10. Kapacita C_{AB} baterie kondenzátorů na obr. 4 se nezmění při sepnutí spinače S. Určete neznámou kapacitu C_x .

Řešení:

Přirovnáme kapacitu před sepnutím spinače

$$C_{AB} = \frac{2}{3} C + \frac{C_x C}{C_x + C}$$

kapacitě po sepnutí spinače

$$C'_{AB} = \frac{3 C (C_x + C)}{4 C + C_x}$$

a dostaneme

$$4 C_x^2 - 4 C C_x + C^2 = 0, \quad C_x = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - \frac{C^2}{4}} = \frac{C}{2}.$$

Neznámá kapacita je rovna $C/2$.

11. Na obr. 5 jsou tři kondenzátory o kapacitách $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 1 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$. Mezi body A a C je přiloženo napětí $U = 120 \text{ V}$. Určete kapacitu C_{AC} , napětí na kondenzátoru C_3 , a náboje na deskách kondenzátorů.

Řešení:

Podle pravidel o sčítání kapacit

$$C_{AC} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} \right)^{-1} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{4}{3} \mu\text{F}.$$

Napětí na kondenzátorech v sérii se rozděluje nepřímo úměrně kapacitám:

$$\frac{U_{AB}}{U_{BC}} = \frac{C_2 + C_3}{C_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad U_{AB} + U_{BC} = U = 120 \text{ V},$$

odkud $U_{AB} = 80 \text{ V}$, $U_{BC} = 40 \text{ V}$. Na kondenzátoru C_3 je tedy napětí 40 V. Pro náboje na deskách jednotlivých kondenzátorů dostaváme

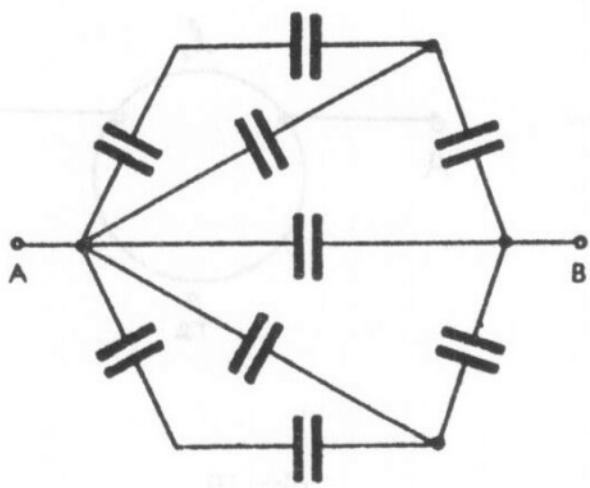
$$Q_1 = C_1 U_1 = 160 \mu\text{F}, \quad Q_2 = C_2 U_2 = 40 \mu\text{F}, \quad Q_3 = C_3 U_3 = 120 \mu\text{F}.$$

12. Kapacity kondenzátorů na obr. 6 jsou $C_1 = C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 1 \mu\text{F}$. Určete výslednou kapacitu mezi body A a B a maximální dovolené napětí, je-li kondenzátor C_3 dimenzován na 1000 V, C_1 a C_2 každý na 450 V.

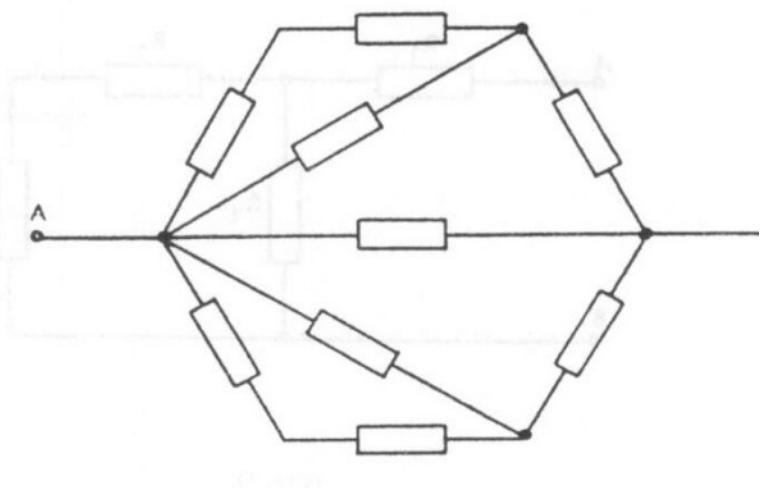
Řešení:

Výsledná kapacita bude

$$C = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1 + 1 = 2 \mu\text{F}.$$



obr. 7



obr. 8

Kondenzátor C_3 vydrží napětí 1000 V, kondenzátory C_1 , C_2 v sérii však jen $450 + 450 = 900$ V. To je tedy maximální dovolené napětí.

13. Mějme kondenzátory o téže kapacitě C zapojeny jako na obr. 7. Určete kapacitu mezi body A a B .

Řešení:

Kapacita mezi body A a C , respektive A a D je

$$C_{AC} = C_{AD} = C + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C} \right)^{-1} = \frac{3}{2} C,$$

takže výsledná kapacita bude dána součtem kapacit

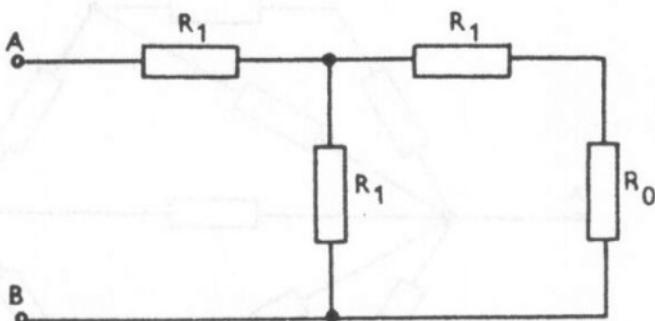
$$2 \left(\frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C} \right)^{-1} + C = \frac{6}{5} C + C = \frac{11}{5} C.$$

Kapacita mezi body A a B je tedy rovna $\frac{11}{5} C$.

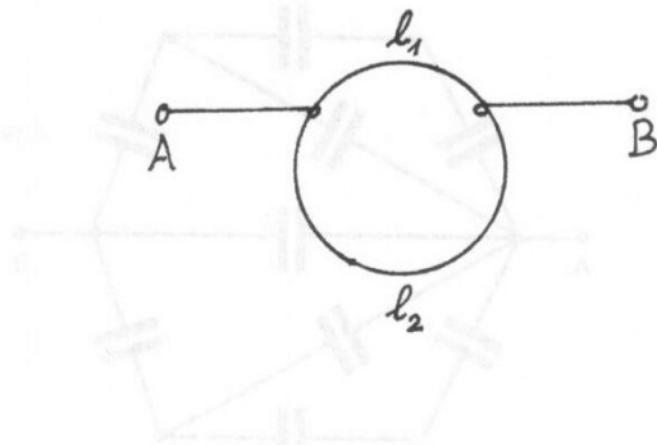
14. Na třech stejně dlouhých úsecích vodiče se změní průřez v poměru 1:2:3. Jak se na těchto úsecích změní napětí?

Řešení:

Na odporech zapojených v sérii se napětí dělí v poměru odporů. Protože odpor vodiče je nepřímo úměrný jeho průřezu, rozdělí se napětí mezi úseky v poměru $1/1 : 1/2 : 1/3 = 6 : 3 : 2$.



obr. 9



obr. 10

15. Jak se změní odpor měděného drátu, napneme-li jej tak, že se prodlouží o 0,1 % ?

Řešení:

Předpokládáme, že objem vodiče zůstane zachován, a že se tedy průřez vodiče zmenší o 0,1 %. Výsledný odpor tedy bude

$$R' = \rho \frac{l'}{S'} = \rho \frac{l}{S} 1,001^2 = 1,002 R.$$

Odpor vodiče vzroste o 0,002%.

16. Mějme odpory o téže velikosti R zapojeny jako na obr. 8. Určete odpor mezi body A a B .

Řešení:

Postupujeme analogicky jako při určování kapacity na obr. 7, pouze pravidla sčítání odporů jsou nyní opačná - v sériovém zapojení se sčítají odporové hodnoty, v paralelním zapojení jejich převrácené hodnoty. Výsledný odpor bude roven $\frac{5}{11} R$.

17. Mějme zapojení odporů jako na obr. 9 - koncovému odporu R_0 je předřazena trojice stejných odporů R_1 ve tvaru T. Určete odpor R_1 tak, aby vstupní odpor mezi body A a B byl opět roven R_0 .

Řešení:

Vstupní odpor v bodech A , B přirovnáme R_0 :

$$R_1 + \frac{(R_1 + R_0) R_1}{R_1 + R_1 + R_0} = R_0..$$

Odtud dostáváme po úpravě

$$3 R_1^2 - R_0^2 = 0, \quad R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}.$$

Odpor R_1 je třeba zvolit roven $R_0/\sqrt{3}$.

18. Homogenní drát má odpor $R = 18 \Omega$. Na kolik stejných částí je třeba ho rozdělit, aby při jejich paralelním zapojení byl výsledný odpor 2Ω ?

Řešení:

Rozdělíme-li drát na n částí, musí zřejmě platit dvě podmínky: $n R = 18$, $n/R = 1/2$. Odtud snadno najdeme, že $n^2 = 9$, $n = 3$. Drát musíme tedy rozdělit na tři stejné části.

19. Z drátu o odporu $R = 10 \Omega$ vytvoříme smyčku tvaru kružnice. Do kterých míst musíme připojit původní vodiče, aby odpor takto zapojené smyčky byl $R' = 0,9 \Omega$ (obr. 10)?

Řešení:

Vzniknou dva paralelně zapojené odpory, jejichž velikost bude úměrná délkám oblouků kruhové smyčky:

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S}, \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S}, \quad R_1 + R_2 = R.$$

Výsledný odpor takto zapojené smyčky bude

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1(R - R_1)}{R_1 + R - R_1} = \frac{R_1 R - R_1^2}{R}, \quad R_1^2 - R_1 R + R' R = 0,$$

odkud

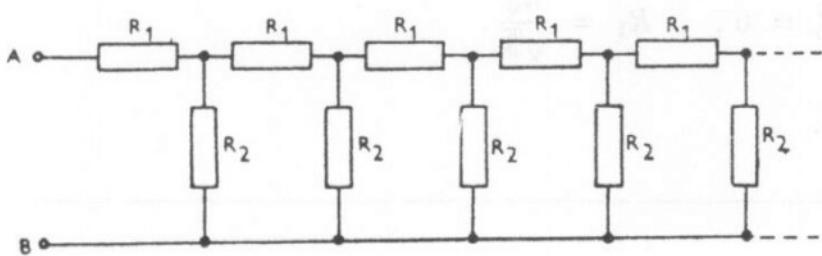
$$R_1 = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} - R' R} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 9 \quad \text{nebo} \quad 1.$$

Smyčku je tedy třeba rozdělit na dva úseky, jejichž délky jsou v poměru 9 : 1.

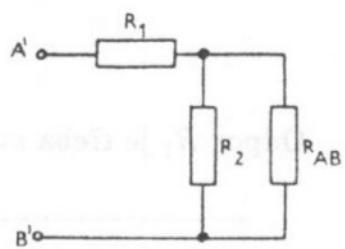
20. Určete vstupní odpor R_{AB} nekonečné řady odporů na obr. 11a.

Řešení:

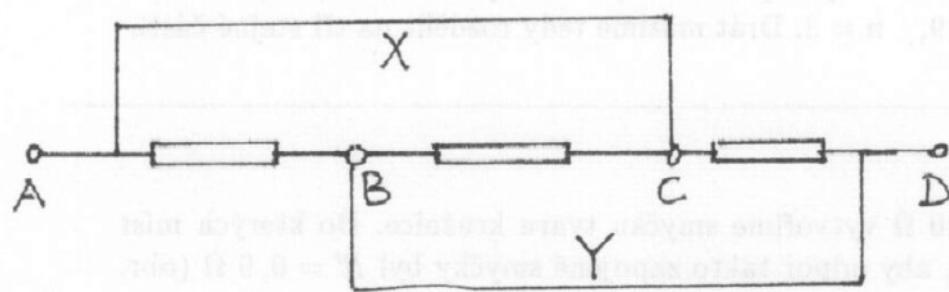
Úloha se na první pohled jeví obtížnou, ale lze ji řešit jednoduchým trikem. Je-li řetízek odporů na obr. 11a nekonečný (tj. nesmírně dlouhý), nemůže se jeho vstupní odpor změnit,



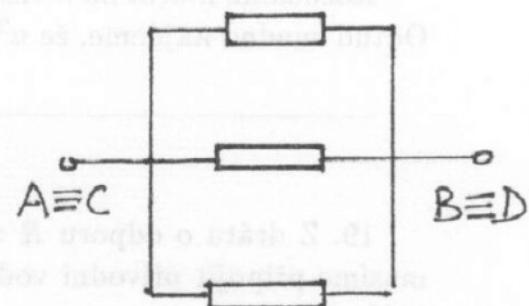
obr. 11a



obr. 11b



obr. 12a



obr. 12b

předřadíme-li mu ještě jeden stupeň z odporů R_1 , R_2 . Vstupní odpor R'_{AB} náhradní sítě na obr. 11b musí být tedy roven R_{AB} :

$$R'_{AB} = R_1 + \frac{R_2 R_{AB}}{R_2 + R_{AB}} = R_{AB},$$

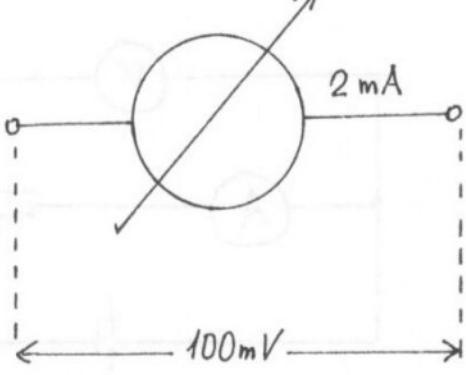
což je kvadratická rovnice k určení vstupního odporu R_{AB} . Z jejích řešení vybereme kladné, které má fyzikální význam:

$$R_{AB} = \frac{1}{2} (R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4 R_1 R_2}).$$

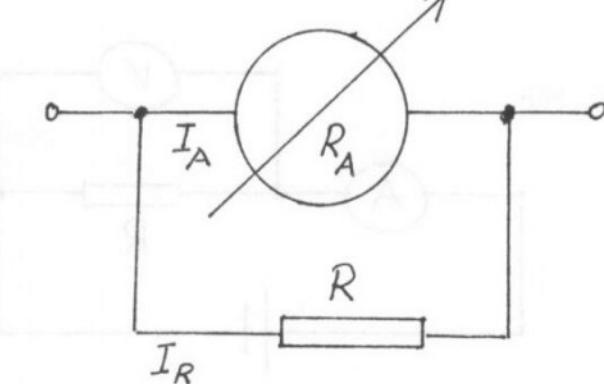
21. Určete odpor obvodu na obr. 12a. Odpory spojů X a Y zanedbejte.

Řešení:

Spoje X a Y způsobují, že bod A a bod C se ztotožňují a stejně tak bod B a bod D . Z bodu A do bodu B můžeme tedy přejít třemi paralelními cestami, vždy přes odpor R



obr. 13a



obr. 13b

(viz náhradní schema na obr. 12b). Hledaný odpor R_{AD} bude tedy roven $R/3$.

22. Náš měřicí přístroj nemá ocejchovanou stupnici. Při plné výchylce jím prochází proud $I = 2 \text{ mA}$ a na svorkách je napětí $U = 100 \text{ mV}$. Jak a jaký odpor musíme k přístroji připojit, aby sloužil jako ampérmetr s rozsahem do $I_{max} = 10 \text{ mA}$?

Řešení:

Z uvedených údajů zjistíme odpor přístroje $R_A = U/I = 50 \Omega$. Abychom mohli měřit proudy větší než 2 mA , musíme připojit paralelně odpor R (bočník). Jeho velikost určíme z Kirchhoffových zákonů (viz obr. 13b):

$$I_A + I_R = I_{max}, \quad R_A I_A + R I_R = 0.$$

Proud $I_A = 2 \text{ mA}$ má vyvolat maximální výchylku, a proto $I_R = 8 \text{ mA}$. Pak snadno určíme odpor bočníku jako

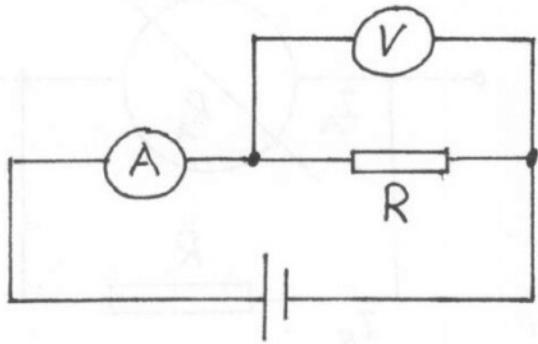
$$R = \frac{I_A}{I_R} R_A = 12,5 \Omega.$$

23. Přístroj má stupnici o 100 dílcích a vnitřní odpor $R_0 = 100 \Omega$. Při průchodu proudu $10 \mu\text{A}$ ukáže výchylku jednoho dílku. Jaké uspořádání musíme zvolit, chceme-li přístroj použít jako voltmetr s rozsahem 100 V a jako ampérmetr pro proudy do 1 A ?

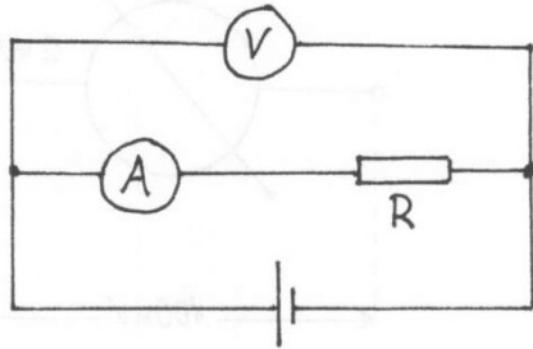
Řešení:

Předpokládáme, že přístroj je lineární a že maximální výchylku ukáže při průchodu proudem 1 mA . Chceme-li použít přístroj jako voltmetr, musíme připojit sériově velký odpor R , který určíme z podmínky $U_{max} = (R_0 + R) I_{max}$ jako

$$R = \frac{U_{max}}{I_{max}} - R_0 = 10^5 - 100 \approx 10^5 \Omega.$$



obr. 14a



obr. 14b

Chceme-li použít přístroj jako ampérmetr, musíme připojit bočník o malém odporu. Bude-li při maximální výchylce protékat přístrojem proud 1 mA, musí téci bočníkem 999 mA. Odpor bočníku tedy musí být

$$R = \frac{I_A}{I_R} R_0 = \frac{0,001}{999} 100 \approx 0,1 \Omega .$$

24. Při měřeních na obr. 14a a 14b bylo naměřeno v prvním případě napětí $U_1 = 83,1$ V a proud $I_1 = 1,34$ A, ve druhém případě $U_2 = 83,4$ V a $I_2 = 1,32$ A. Určete odpor R a vnitřní odpory voltmetru a ampérmetru.

Řešení:

Nejdříve určíme odpor ampérmetru:

$$U_2 - U_1 = R_A I_1 , \text{ odkud } R_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1} = 0,224 \Omega .$$

Z druhého zapojení najdeme odpor R :

$$U_2 = (R + R_A) I_2 , \text{ odkud } R = \frac{U_2}{I_2} - R_A = 62,96 \Omega .$$

Konečně z prvního zapojení dostaneme

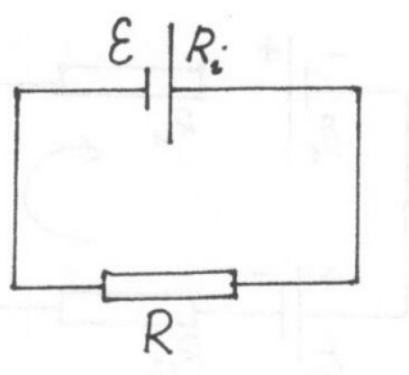
$$U_2 = \left(R_A + \frac{R R_V}{R + R_V} \right) I_1 .$$

Odtud snadno určíme

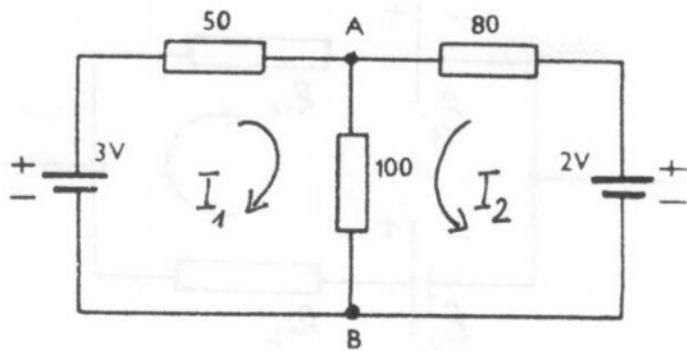
$$R' = \frac{R R_V}{R + R_V} = \frac{U_2}{I_1} - R_A = 62,0149 \Omega$$

a odpor voltmetru jako

$$R_V = \frac{R' R}{R - R'} = 4140 \Omega .$$



obr. 15



obr. 16

Údaj o odporu voltmetru není příliš přesný, neboť vznikl dělením rozdílem velmi blízkých čísel.

25. Máme baterii o neznámém elektromotorickém napětí a neznámém vnitřním odporu. Připojíme-li k ní odpor $R_1 = 30 \Omega$, poteče obvodem proud $I_1 = 125 \text{ mA}$, připojíme-li k ní odpor $R_2 = 40 \Omega$, poteče proud $I_2 = 100 \text{ mA}$. Určete \mathcal{E} a R_i (obr. 15).

Řešení:

Z Ohmova zákona dostaneme soustavu rovnic

$$\mathcal{E} = (R_1 + R_i) I_1, \quad \mathcal{E} = (R_2 + R_i) I_2.$$

Dosazením číselných hodnot a řešením této soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$, $R_i = 10 \Omega$.

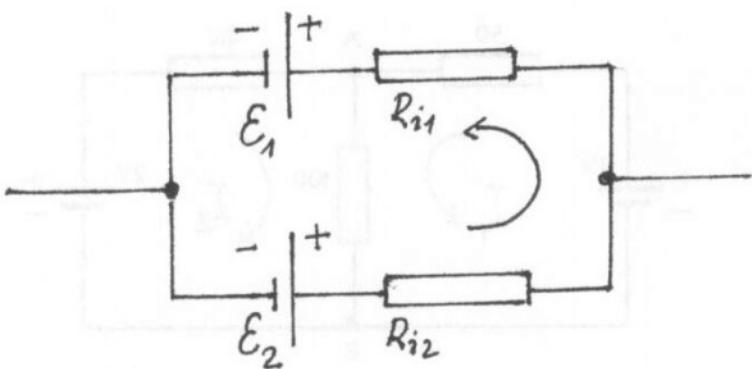
26. Na obr. 16 je znázorněna stejnosměrná elektrická síť. Údaje o odporech jsou v ohmech. Určete, jaký proud poteče mezi body A a B. Vnitřní odpory zdrojů jsou zanedbatelné.

Řešení:

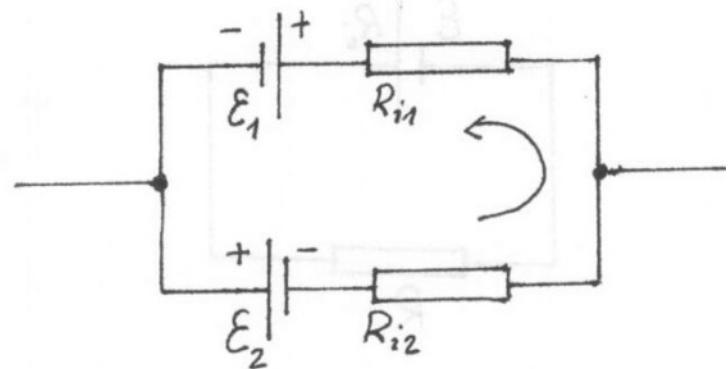
Použijeme takzvané metody smyčkových proudů (jsou označeny na obrázku). Z Kirchhoffových zákonů pak dostaváme

$$\mathcal{E}_1 = 50 I_1 + 100 (I_1 + I_2) = 3, \quad \mathcal{E}_2 = 80 I_2 + 100 (I_1 + I_2) = 2.$$

Řešením této soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dostaneme $I_1 = 20 \text{ mA}$, $I_2 = 0$. Mezi body A a B tedy protéká proud 20 mA, proud ve druhé smyčce je nulový.



obr. 17a



obr. 17b

27. Měli jsme dva olověné akumulátory o elektromotorických napětích a vnitřních odporech $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$, $R_{i1} = 0,04 \Omega$, $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ V}$, $R_{i2} = 0,02 \Omega$. Nějaký blbec je zapojil omylem vedle sebe. Jaký poteče akumulátory proud a jaké napětí bude na jejich svorkách (než dojde k jejich zničení) ve dvou takových zapojených znázorněných na obr. 17?

Řešení:

V prvním případě dostáváme

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = (R_{i1} + R_{i2}) I_1, \quad \text{odkud} \quad I_1 = 100 \text{ A}.$$

Napětí na svorkách bude

$$U_1 = \mathcal{E}_1 - R_1 I_1 = 12 - 0,04 \cdot 100 = 8 \text{ V}.$$

Ve druhém případě

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = (R_{i1} + R_{i2}) I_2, \quad \text{odkud} \quad I_2 = 300 \text{ A}.$$

Napětí na svorkách v tomto případě bude nulové:

$$U_2 = \mathcal{E}_1 - R_1 I_2 = 0 \text{ V}.$$

28. Žárovka s wolframovým vláknem má při teplotě $t_1 = 20^\circ \text{C}$ odpor $R_1 = 9,7 \Omega$. Když svítí, zvětší se její odpor na $R_2 = 121 \Omega$. Určete teplotu vlákna t_2 , je-li teplotní koeficient odporu pro wolfram $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Řešení:

Odpor kovů roste s teplotou lineárně podle zákona $R = R_0(1 + \alpha t)$, kde t je teplota ve stupních Celsia. Poměr odporů vodiče při dvou různých teplotách bude tedy

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Odtud určíme teplotu vlákna žárovky jako

$$t_2 = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{R_2}{R_1} (1 + \alpha t_1) - 1 \right] = 2799^\circ \text{C}.$$

-
29. Topná "spirála" na elektrickém vařiči má při napětí 220 V výkon 1000 W. Jaký bude mít výkon, připojíme-li ji na napětí 110 V ? Předpokládejte, že odpor nezávisí na teplotě.

Řešení:

Tepelný výkon vyvíjený na čistě ohmickém odporu je úměrný čtverci napětí. Předpokládáme-li tedy, že odpor se nezměnil, dostaneme

$$P_{110} = \frac{110^2}{220^2} P_{220} = 250 \text{ W}.$$

-
30. Jaká je indukčnost cívky, jestliže se v ní při lineární změně proudu o 4 A za 0,5 s indukuje elektromotorické napětí 16 V ?

Řešení:

Podle zákona elektromagnetické indukce je indukované napětí úměrné změně proudu za jednotku času, má opačné znaménko než tato změna a koeficientem úměrnosti je právě vlastní indukčnost L . Tedy

$$\mathcal{E}_{ind} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Odtud

$$L = \frac{0,5}{4} 16 = 2 \text{ H}.$$

-
31. Určete vlastní indukčnost cívky kruhového průřezu, bez jádra, o poloměru 1 cm, délky 50 cm, na níž je navinuto 300 závitů.

Řešení:

$$L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 300^2 \cdot \pi \cdot 10^{-4}}{0,5} = 71 \mu\text{H}.$$

32. Kondenzátor má kapacitu $C = 2 \text{ pF}$. Jakou indukčnost musí mít cívka zařazená s ním v sérii do rezonančního obvodu, aby vysílané elektromagnetické vlnění mělo vlnovou délku $\lambda = 1,5 \text{ m}$?

Řešení:

S použitím Thomsonova vzorce dostaneme

$$\lambda = c T = c 2 \pi \sqrt{L C}, \quad \text{odkud} \quad L = \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 c^2 C} = 0,32 \mu\text{H}.$$

33. Cívka je připojena ke zdroji střídavého napětí $U = 10 \text{ V}$, 50 Hz a protéká jí proud $I = 0,625 \text{ A}$. Pak je připojena ke zdroji stejnosměrného napětí $U' = 10 \text{ V}$ a teče jí proud $I' = 1,25 \text{ A}$. Určete indukčnost cívky.

Řešení:

V prvním případě platí

$$U = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I,$$

ve druhém

$$U' = R I', \quad \text{odkud} \quad R = 8 \Omega.$$

Máme tedy

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} = \frac{1}{2 \pi 50} \sqrt{256 - 64} = 44 \mu\text{H}.$$

34. Cívkom protéká střídavý proud $0,20 \text{ A}$, 50 Hz při napětí 24 V . Určete její indukčnost (její ohmický odpor lze zanedbat).

Řešení:

Platí

$$U = \omega L I, \quad L = \frac{U}{\omega I} = \frac{24}{2 \pi \cdot 50 \cdot 0,20} = 382 \text{ mH}.$$

35. V síti střídavého proudu 120 V, 50 Hz je v sérii s ampérmetrem zapojen kondenzátor. Ampérmetr ukazuje proud 240 mA. Určete kapacitu kondenzátoru. Odpor přístroje a přívodů zanedbejte.

Řešení:

Platí

$$U = \frac{1}{\omega C} I, \quad C = \frac{I}{\omega U} = \frac{240 \cdot 10^{-3}}{120 \cdot 2 \pi \cdot 50} = 6,37 \mu\text{F}.$$

36. Elektron vletí rychlostí $v = 6 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ kolmo do homogenního magnetického pole o magnetické indukci $B = 10^{-4} \text{ T}$. Určete poloměr trajektorie a dobu oběhu elektronu v tomto magnetickém poli. Měrný náboj elektronu je $e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}$.

Řešení:

Na elektron působí Lorentzova síla $\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$, kolmá jak k vektoru rychlosti tak k magnetickému poli. Elektron se bude pohybovat po kruhové trajektorii, jejíž poloměr dostaneme, přirovnáme-li velikost Lorentzovy síly velikosti síly dostředivé:

$$e v B = \frac{m v^2}{R}, \quad R = \frac{m v}{e B} = \frac{6 \cdot 10^5}{1,76 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Dobu oběhu dostaneme jako

$$T = \frac{2 \pi R}{v} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

TERMIKA

Užitečné vzorce

termodynamická teplota: $T = (t + 273, 15) \text{ K}$, t je teplota ve $^{\circ}\text{C}$

tepelná kapacita soustavy (tělesa; kapaliny, plynu, pevné látky): $C = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q}{\Delta T}$,
 Q je množství tepla, které soustava přijme, zvýší-li se její teplota o 1 K;
jednotkou C je J.K^{-1}

měrná tepelná kapacita soustavy: $c = \frac{Q}{m \Delta t} = \frac{Q}{m \Delta T}$,
 m je hmotnost soustavy; jednotkou c je $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

skupenské тепло tání L_t : množství tepla, které přijme soustava ve skupenství pevném zahřátá na teplotu tání, aby se přeměnila na kapalinu též teploty; jednotkou L_t je J

měrné skupenské тепло tání: $l_t = \frac{L_t}{m}$, m je hmotnost soustavy; jednotkou l_t je J.kg^{-1}

kalorimetrická rovnice: $c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2)$, $t_2 < t < t_1$;
 $c_1 m_1 (t_1 - t)$ je тепло, které předá teplejší těleso chladnějšímu,
 $c_2 m_2 (t - t_2)$ je тепло, které přijme těleso chladnější,
 t je výsledná teplota

první věta termodynamická: $Q = \Delta U + W$, teplo soustavě dodané se spotřebuje na přírůstek vnitřní energie soustavy a na práci, kterou soustava vykoná;
 $Q > 0$, jestliže soustava teplo přijímá,
 $Q < 0$, jestliže soustava teplo okolí odevzdává,
 $W > 0$, jestliže soustava práci koná (zvětšuje se její objem),
 $W < 0$, jestliže okolní tělesa vykonávají na soustavu práci (zmenšuje se její objem)

ideální plyn: plyn, který splňuje stavovou rovnici $pV = nRT$, n je látkové množství, R je univerzální plynová konstanta

rovnice adiabaty (Poissonův zákon): $pV^\kappa = \text{konst}$, Poissonova konstanta $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, c_p , c_v jsou měrné tepelné kapacity při konstantním tlaku a při konstantním objemu

práce vykonaná plynem při stálém tlaku $p = p_0$: $W = p_0(V_2 - V_1)$, V_1 je objem plynu na počátku děje, V_2 je objem plynu na konci děje

práce vykonaná plynem, jestliže $p = p(V)$:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

účinnost kruhového děje: $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$; W je práce, kterou vykonal plyn během celého cyklu, Q_1 je teplo, které plyn získal od ohříváče, Q_2 je teplo, které odevzdal chladiči; $Q_1 > 0, Q_2 < 0$

účinnost Carnotova kruhového děje (dvě izotermy, dvě adiabaty, ideální plyn):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

T_1 je termodynamická teplota ohříváče, T_2 je termodynamická teplota chladiče; větší účinnosti mezi lázněmi s teplotami T_1, T_2 nelze dosáhnout (důsledek 2. věty termodynamické).

Užitečné konstanty

měrná tepelná kapacita vody $c_v = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

měrná tepelná kapacita ledu $c_l = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

měrné skupenské teplo tání ledu $l_l = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

normální teplota $t_n = 0^\circ\text{C}$, normální tlak $p_n = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \doteq 10^5 \text{ Pa}$

univerzální plynová konstanta $R \doteq 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Avogadrova konstanta $N_A \doteq 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (počet částic v jednom molu)

standardní entalpie vzniku vodíku $\Delta_f H^\circ = 285,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ (vznik vodíku z vodíkového plynu)

standardní entalpie vzniku vodíkového plynu $\Delta_f H^\circ = 0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ (vznik vodíkového plynu z vodíku)

$$\text{H}_2\text{O} = \text{H}_2 + \text{O}_2 \quad \Delta_f H^\circ = 285,8 + 0 = 285,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

standardní entalpie vzniku vodíkového plynu $\Delta_f H^\circ = 0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ (vznik vodíkového plynu z vodíku)

standardní entalpie vzniku vodíkového plynu $\Delta_f H^\circ = 0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ (vznik vodíkového plynu z vodíku)

1. Na 6 kg ledu teploty 0°C byly nality 4 kg vody teploty 100°C . Určete výslednou teplotu t po dosažení tepelné rovnováhy. Ztráty tepla do okolí zanedbejte.

Řešení:

K roztátí ledu o celkové hmotnosti $m_l = 6 \text{ kg}$ a teploty 0°C je zapotřebí teplo $l m_l = 2004 \text{ kJ}$. K dispozici máme nejvýše teplo, které můžeme získat ochlazením vody o hmotnosti $m_v = 4 \text{ kg}$ a teploty $t_v = 100^{\circ}\text{C}$ na teplotu 0°C , $c m_v t_v = 1680 \text{ kJ}$. Bude tedy výsledná teplota směsi 0°C a roztaže pouze led o hmotnosti $m'_l = c m_v t / l = 5 \text{ kg}$.

2. Kousek ledu o celkové hmotnosti $m_1 = 1 \text{ kg}$ a teplotě $t_1 = 0^{\circ}\text{C}$ vhodíme do kalorimetru, v němž je voda o hmotnosti $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ a teplotě $t_2 = 50^{\circ}\text{C}$. Jaký bude stav soustavy po dosažení tepelné rovnováhy? Zanedbejte ztráty do okolí a tepelnou kapacitu kalorimetru.

Řešení:

Příklad se řeší stejně jako předcházející, výsledná teplota v kalorimetru po dosažení tepelné rovnováhy bude 0°C a roztaže $0,3 \text{ kg}$ ledu.

3. Jak dlouho bude trvat tepelnému zdroji o výkonu $P = 1 \text{ kW}$ roztavení jednoho kilogramu ledu o teplotě $t_1 = -10^{\circ}\text{C}$ na vodu o teplotě $t_2 = 20^{\circ}\text{C}$. Ztráty tepla neuvažujte.

Řešení:

K ohřátí ledu o hmotnosti $m_l = 1 \text{ kg}$ a teploty $t_1 = -10^{\circ}\text{C}$ na teplotu 0°C , jeho roztátí a ohřátí na teplotu $t_2 = 20^{\circ}\text{C}$ je zapotřebí teplo

$$Q = c_1 m_l t_1 + l m_l + c_2 m_l t_2 = (21 + 334 + 84) \text{ kJ} = 339 \text{ kJ}$$

Toto teplo získáme z tepelného zdroje o známém výkonu $P = 1 \text{ kW}$, který pracuje po dobu τ , pro kterou platí $\tau = Q/P = 439 \text{ s} = 7,3 \text{ min}$.

4. Kapalina v kalorimetru, jejíž teplota je t_o , byla ohřáta na teplotu t_k vložením kovo-válečku o hmotnosti m_v vyhřátého na teplotu varu vody za normálního tlaku. Téhož efektu lze dosáhnout pomocí rezistoru o odporu R , je-li na něj přiloženo po dobu τ elektrické napětí E . Odpor R pokládejte za nezávislý na teplotě. Vypočítejte měrné teplo c_v materiálu, z něhož je váleček vyroben.

Řešení:

Váleček předal kalorimetru teplo $Q = c_v m_v (100 - t_k)$. Totéž teplo získáme průchodem proudem rezistorem o odporu R po dobu τ ; $Q = (E^2/R)\tau$. (Vycházíme ze situace, kdy je do kalorimetru vložen neohřátý váleček a teplota se v kalorimetru ustálí na teplotě t_o . Potom na rezistor, který je vložen v kalorimetru, přiložíme napětí E a za dobu τ ho vypneme. Teplota v kalorimetru se ustálí na hodnotě t_k .) Pro měrné teplo materiálu válečku získáme vztah

$$c_v = \frac{(E^2/R)\tau}{m_v (100 - t_k)}$$

5. Kolik teplé vody teploty $t_1 = 60^{\circ}\text{C}$ a kolik studené vody teploty $t_2 = 10^{\circ}\text{C}$ musíme napustit do vany, chceme-li mít v ní vodu o objemu $V = 50\text{ l}$ teploty $t_0 = 40^{\circ}\text{C}$. Tepelné ztráty neuvažujte, hustotu vody pokládejte za nezávislou na teplotě.

Řešení:

Pro výpočet hmotností m_t a m_s teplé a studené vody sestavíme dvě rovnice

$$m_t + m_s = M$$

$$m_t (t_1 - t_0) = m_s (t_0 - t_2) ,$$

kde $M = \rho V = 50\text{ kg}$, z kterých po číselném dosazení za M , t_1 , t_2 a t_0 a po úpravě dostaneme rovnice

$$m_t + m_s = 50$$

$$2 m_t - 3 m_s = 0 .$$

Z těchto rovnic vypočítáme m_s a m_t , $m_t = 20\text{ kg}$ a $m_s = 30\text{ kg}$. Vodu o objemu 50 l a teplotě 40°C dostaneme smícháním 30 l vody o teplotě 60°C a 20 l vody o teplotě 10°C .

6. Ideální plyn má při teplotě 27°C tlak 500 Pa. Jaký bude mít tlak p , ohřejeme-li ho při konstantním objemu na teplotu 177°C ?

Řešení:

Pro ideální plyn platí stavová rovnice $pV = nRT$, kde p je tlak, V je objem, n je látkové množství, R je univerzální plynová konstanta a T je absolutní teplota. Ze stavové rovnice pro náš případ plyne

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 500 \frac{177 + 273}{27 + 273} \text{ Pa} = 750 \text{ Pa}$$

Indexem 1 je označen výchozí stav plynu, indexem 2 stav po ohřátí na teplotu $t_2 = 177^{\circ}\text{C}$ při konstantním objemu.

7. Skleněná koule s kohoutkem, naplněná vzduchem, byla zvážena při teplotě $t_1 = 15^{\circ}\text{C}$. Potom byla při otevřeném kohoutku ohřáta na teplotu $t_2 = 80^{\circ}\text{C}$ a kohoutek byl uzavřen. Vážením byl zjištěn úbytek hmotnosti $\Delta m = 250 \text{ mg}$. Vypočítejte objem V vnitřku koule. Teplotní roztažnost skleněné koule zanedbejte.
(Hustota vzduchu při teplotě $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ je $\rho_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.)

Řešení:

Pro první případ (teplota t_1) můžeme psát stavovou rovnici $pV = (m_1/M_m)RT_1$, pro druhý (teplota t_2) $pV = (m_2/M_m)RT_2$. Tlak p a objem V jsou v obou případech stejné, m_1 a m_2 jsou hmotnosti plynu při teplotách t_1 , t_2 resp. T_1 , T_2 , M_m je molární hmotnost vzduchu. Měřením byl zjištěn rozdíl hmotností $m_1 - m_2 = \Delta m = 250 \text{ mg}$.

Pro hustotu ρ v závislosti na teplotě T plyne ze stavové rovnice vztah

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{pM_m}{R} \frac{1}{T_1},$$
$$\rho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{pM_m}{R} \frac{1}{T_2}.$$

Konstantu pM_m/R můžeme spočítat ze vztahu

$$\rho_0 = \frac{pM_m}{R} \frac{1}{T_0},$$

kde ρ_0 je hustota vzduchu při teplotě 273 K (je zadána). Z předchozích vztahů pak pro objem nádoby V postupně dostáváme

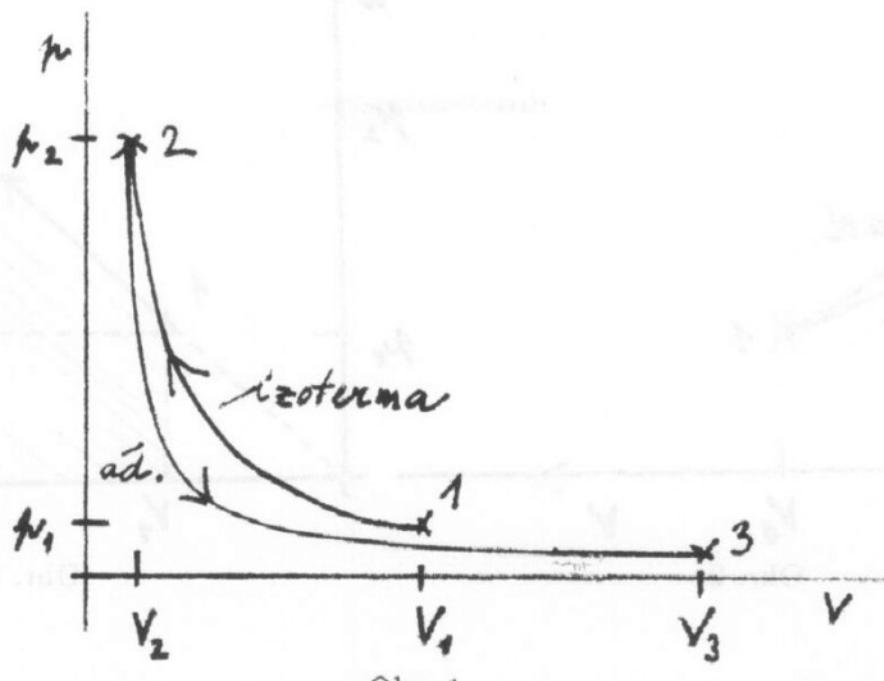
$$V = \frac{m_1 - m_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{m_1 - m_2}{\rho_0 T_0 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)},$$

$$V = \frac{250 \cdot 10^{-6}}{1,3 \cdot 273 \cdot \left(\frac{1}{15+273} - \frac{1}{80+273} \right)} \text{ m}^3 = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

8. Vzduch o objemu $V_1 = 1 \text{ l}$ a teplotě $t_1 = 20^{\circ}\text{C}$ stlačíme izotermicky na objem $V_2 = 0,1 \text{ l}$ a potom jej necháme adiabaticky rozepnout na objem $V_3 = 2 \text{ l}$. Jaká bude výsledná teplota vzduchu?
(Poissonova konstanta pro vzduch $\kappa = 1,4$.)

Řešení:

Děj izotermický a adiabatický si znázorníme v $p - V$ diagramu (viz obr. 1). Platí postupně



Obr. 1

$p_1 V_1 = n R T_1$, $p_2 V_2 = n R T_1$, $p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa$ (rovnice adiabaty v proměnných p, V), resp. $T_2 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1}$ (rovnice adiabaty v proměnných T, V ; dostaneme ji z rovnice adiabaty v proměnných p, V , dosadíme-li za tlak p výraz vypočítaný ze stavové rovnice ideálního plynu), $T_2 = T_1$ (děj $1 \rightarrow 2$ je izotermický) a konečně

$$T_3 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} = (20 + 273) \left(\frac{0,1}{2} \right)^{1,4-1} = 88 \text{ K} ,$$

$$t_3 = -185^{\circ}\text{C} .$$

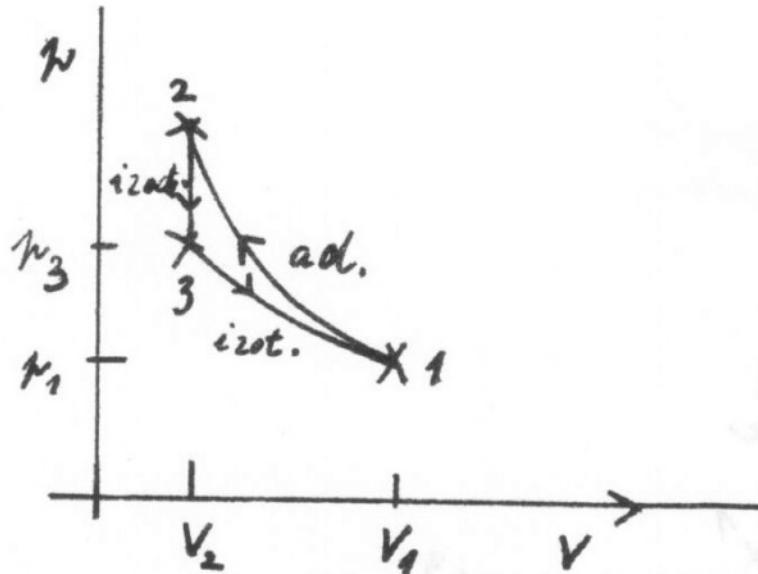
9. Plyn má tlak $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$. Nejprve se při adiabatickém ději jeho objem zmenší na polovinu původního objemu, pak se izochorickým dějem sníží jeho teplota na původní teplotu. Jaký je konečný tlak p ?

Řešení:

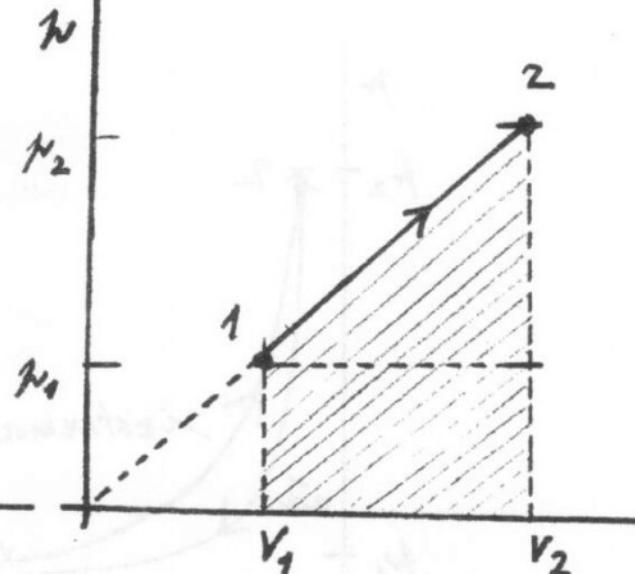
Popsané děje jsou znázorněny na obr. 2, v zadání tlak označený symbolem p je na obrázku nazvaný p_3 .

Platí $p_3 V_3 = p_1 V_1$ a poněvadž $V_2 = V_1/2$, je $p_3 = 2 p_1$.

10. Spočítejte práci W vykonanou ideálním plymem při zvětšení objemu z V_1 na V_2 , jestliže se plyn rozpíná podle vztahu $p = k V$, kde k je kladná konstanta. Přijímá plyn při



Obr. 2



Obr. 3

tomto ději teplo nebo je vydává ?

Řešení: Práce W vykonaná plynem se rovná vyšrafované ploše v $p - V$ diagramu na obr. 3:

$$W = p_1(V_2 - V_1) + \frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}k(V_2^2 - V_1^2) .$$

11. Dvě nádoby o objemech $V_1 = 7\text{ l}$ a $V_2 = 12\text{ l}$ obsahující určité množství ideálního plynu jsou spojeny tenkou trubičkou. První nádoba je udržována na stálé teplotě $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Na jakou teplotu t_2 je třeba ohřát plyn v druhé nádobě, aby v ní byla obsažena jedna třetina celkového množství plynu ?

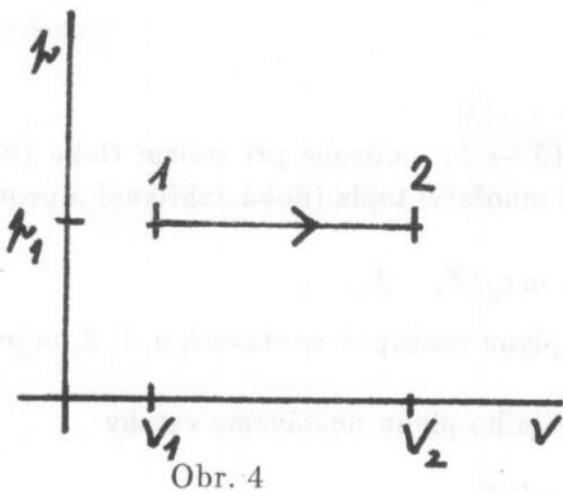
Řešení:

Pro první nádobu platí $p_1 V_1 = \frac{2}{3}n R T_1$ (n je celkové látkové množství plynu), pro druhou nádobu je $p_1 V_2 = \frac{1}{3}n R T_2$. (Objemy nádob V_1, V_2 pokládáme za nezávislé na teplotě.) Porovnáním obou výrazů dostneme pro teplotu T_2 vztah

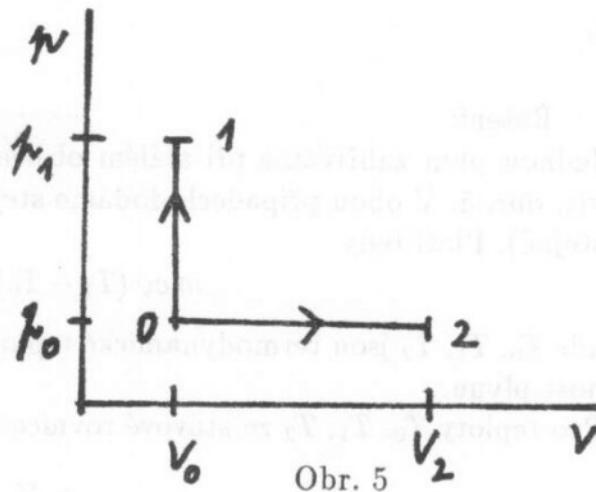
$$T_2 = 2 \frac{V_2}{V_1} T_1 ,$$

$$T_2 = 2 \frac{12}{7} 273 \text{ K} = 936 \text{ K} ,$$

$$t_2 = 663^\circ\text{C} .$$



Obr. 4



Obr. 5

12. Kyslík hmotnosti $m = 64$ g a objemu $V_1 = 1,5$ l se při stálém tlaku zahřál z původní teploty $t_1 = 20$ °C na teplotu $t_2 = 70$ °C. Vypočítejte tlak a objem kyslíku při teplotě $t_2 = 70$ °C a práci, kterou kyslík vykonal.

Řešení:

Děj, který probíhá kyslík, je nakreslen v p - V diagramu na obr. 4. Pro stav 1,2 dostáváme podle stavové rovnice ideálního plynu vztahy $p_1 V_1 = n R T_1$, $p_1 V_2 = n R T_2$, kde $n = m/M(O_2) = (64/32)$ mol = 2 mol, $V_1 = 1,5$ l = $1,5 \cdot 10^{-3}$ m³, $T_1 = (20 + 273)$ K, $T_2 = (70 + 273)$ K.

Pro hledané veličiny p_1 , V_2 , W ($p_1 = p$, $V_2 = V$) postupně dostáváme

$$p_1 = \frac{n R T_1}{V_1} = \frac{2 \cdot 8,3 \cdot (20 + 273)}{1,5 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 3,24 \cdot 10^6 \text{ Pa} ,$$

$$V_2 = \frac{n R T_2}{p_1} = \frac{2 \cdot 8,3 \cdot (70 + 273)}{3,24 \cdot 10^6} \text{ m}^3 = 1,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ,$$

$$W = p_1 (V_2 - V_1) = 3,24 \cdot 10^6 \cdot (1,76 - 1,50) \cdot 10^{-3} \text{ J} = 842 \text{ J} .$$

13. Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_V$ (c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku, c_V je měrná tepelná kapacita při konstantním objemu) se dá změřit např. takto: určité množství plynu dané počáteční teploty t_0 , tlaku p_0 a objemu V_0 zahříváme platinovým drátkem, kterým po jistou dobu prochází proud. Poprvé zahříváme plyn při stálém objemu V_0 na teplotu t_1 a tlak p_1 , podruhé při stálém tlaku p_0 na teplotu t_2 a objem V_2 . Pro oba tyto případy jsou doba zahřívání a proud stejné. Dokažte, že platí

$$\kappa = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{p_0(V_2 - V_0)} .$$

Řešení:

Jednou plyn zahříváme při stálém objemu ($0 \rightarrow 1$), podruhé při stálém tlaku ($0 \rightarrow 2$), viz. obr. 5. V obou případech dodáme stejné množství tepla (doba zahřívání a proud jsou stejné). Platí tedy

$$m c_V (T_1 - T_0) = m c_p (T_2 - T_0) ,$$

kde T_0, T_1, T_2 jsou termodynamické teploty plynu postupně ve stavech 0, 1, 2, m je hmotnost plynu.

Pro teploty T_0, T_1, T_2 ze stavové rovnice ideálního plynu dostáváme vztahy

$$p_0 V_0 = n R T_0 ,$$

$$p_1 V_1 = n R T_1 ,$$

$$P_0 V_2 = n R T_2 ,$$

kde n je látkové množství plynu.

Pro Poissonovu konstantu κ tedy platí

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} = \frac{(p_1 - p_0) V_0}{p_0 (V_2 - V_0)} ,$$

což je vztah, který jsme měli dokázat.

14. Jakou maximální práci může vykonat během jednoho cyklu ideální tepelný stroj, přijme-li během cyklu od ohřívače o teplotě 727°C teplo 1 kJ? Teplota chladiče je 20°C . Kolik tepla odevzdá chladiči?

Řešení:

Pro účinnost η tepelného stroje platí vztah

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} ,$$

kde W je práce vykonaná strojem během jednoho cyklu, Q_1 je teplo přijaté od ohřívače během jednoho cyklu, Q_2 je teplo odevzdané chladiči během jednoho cyklu. Nechť T_1 je absolutní teplota ohřívače a T_2 absolutní teplota chladiče; $T_1 > T_2$. Maximální účinnost ze všech strojů pracujících mezi teplotami T_1, T_2 má Carnotův tepelný stroj (dvě izotermy, dvě adiabaty); platí pro ni $\eta_{max} = 1 - T_2/T_1$.

$$\eta \leq \eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{20 + 273}{727 + 273} = 0,707 ,$$

$$W_{max} = \eta_{max} Q_1 = 0,707 \text{ kJ} ,$$

$$Q_2 = Q_1 (1 - \eta_{max}) = 0,293 \text{ kJ} .$$

15. Tepelný stroj přijal během jednoho cyklu od ohřívače teplo 100 kJ a odevzdal chladiči teplo 60 kJ. Jaká je účinnost η tepelného stroje? Jakou nerovnost lze napsat pro poměr mezi teplotami chladiče a ohřívače?

Řešení:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{100 - 60}{100} = 0,4 \quad ,$$

$$\eta \leq \eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad .$$

Symboly užité v těchto vzorcích mají stejný význam jako symboly z příkladu 14.

Platí tedy, že

$$0,4 \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} ; \quad \frac{T_2}{T_1} \leq 0,6$$

16. Plyn přijal od ohřívače během jednoho cyklu teplo 7 MJ a odevzdal chladiči teplo 3 MJ. Jakou práci W během tohoto cyklu vykonal a jaká byla účinnost η tohoto cyklu?

Řešení:

$$W = Q_1 - Q_2 = (7 - 3) \text{ MJ} = 4 \text{ MJ} \quad ,$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{7 - 3}{7} = \frac{4}{7} = 0,57 \quad .$$

Symboly Q_1, Q_2 mají stejný význam jako v příkladě 14.

17. Vzduch o objemu $V = 1 \text{ l}$ má za normálních podmínek hmotnost přibližně 1,3 g. Odhadněte řádově, jakou část objemu ΔV zaujmají molekuly? Objem jedné molekuly je asi $2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$.

Řešení:

1 mol vzduchu za normálních podmínek zaujímá objem 22,4 l a obsahuje $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ molekul (Avogadrova konstanta).

1 l vzduchu má látkové množství n , které bud' vypočítáme ze vztahu $n = \frac{1}{22,4} \text{ mol}$ (trojčlenkou na základě předcházejících údajů) nebo ze vztahu $n = m/M_m$, kde m je hmotnost vzduchu v 1 l za normálních podmínek ($m = 1,3 \text{ g}$) a M_m je molární hmotnost vzduchu ($M_m = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$). V obou případech dostaneme, že 1 l vzduchu za normálních podmínek má látkové množství (počet molů) $n = 0,045 \text{ mol}$. Látkové množství $n = 0,045 \text{ mol}$ obsahuje

$$N = 0,045 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ molekul} = 0,27 \cdot 10^{23} \text{ molekul} \quad ,$$

a ty zaujímají objem

$$\Delta V = 0,27 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 = 0,54 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 = 0,54 \cdot 10^{-4} \text{ l}$$

18. Odhadněte pomocí Avogadrovy konstanty průměr atomu železa. Hustota železa je 7860 kg.m^{-3} , relativní atomová hmotnost železa $A_r = 55,85$. Vyjděte z představy těsného uspořádání atomů v mříži.

Řešení:

Víme, že 1 cm^3 železa má hmotnost $7,86 \text{ g}$ a $55,85 \text{ g}$ železa je látkové množství 1 mol . Víme tedy, že 1 cm^3 železa obsahuje látkové množství

$$n = \frac{7,86}{55,85} \text{ mol} = 0,141 \text{ mol}$$

a je v něm

$$N = 0,141 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ atomů} = 0,847 \cdot 10^{23} \text{ atomů}$$

Jeden atom železa tedy zaujímá objem

$$V = \frac{1}{0,847 \cdot 10^{23}} \text{ cm}^3 = 1,18 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3$$

Představíme-li si tento objem jako krychli o hraně a , je

$$a = \sqrt[3]{1,18 \cdot 10^{-23}} \text{ cm} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

představíme-li si ho jako kouli o průměru d , je

$$d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot 1,18 \cdot 10^{-23}} \text{ cm} = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

19. Jakou molární hmotnost má látka, jejíž 224 cm^3 par (měřeno za normálních podmínek) má hmotnost $0,44 \text{ g}$?

Řešení:

Objem 224 cm^3 plynu (měřeno za normálních podmínek) má hmotnost $0,44 \text{ g}$, objem $22,4 \text{ l}$ za těchto podmínek má hmotnost 44 g a obsahuje 1 mol látkového množství. Molární hmotnost je tedy $M_m = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

20. Kolik molekul plynу N je obsaženo ve vakuové elektronce o vnitřním objemu

$V = 25 \text{ cm}^3$, v níž bylo dosaženo tlaku $p = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ při teplotě 17°C ?

Řešení:

V elektronce je obsaženo látkové množství n plynu,

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1,33 \cdot 10^{-4} \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{8,3 \cdot (273 + 17)} \text{ mol} = 0,014 \cdot 10^{-10} \text{ mol} .$$

V látkovém množství $n = 0,014 \cdot 10^{-10} \text{ mol}$ je obsaženo

$$N = 0,014 \cdot 10^{-10} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ molekul} = 8,3 \cdot 10^{11} \text{ molekul} .$$

21. Určete, jakou hmotnost m má látkové množství 1,5 mol oxidu uhličitého v plynném stavu za normálních podmínek.

Řešení:

Hmotnost m plynu vypočítáme ze vztahu $n = m/M_m$, kde n je látkové množství, M_m je molární hmotnost.

Molární hmotnost oxidu uhličitého CO_2 je $M_m = (12 + 2 \cdot 16) \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Platí tedy

$$m = n M_m = 1,5 \cdot 44 \text{ g} = 66 \text{ g} .$$

22. Plyn o objemu $V = 1 \text{ dm}^3$ za normálních podmínek má hmotnost 1,25 g. Jaká je jeho molární hmotnost M_m ?

Řešení:

Pro molární hmotnost M_m platí $M_m = m/n$, kde m je hmotnost plynu, n jeho látkové množství.

Látkové množství

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 273} \text{ mol} = 0,044 \text{ mol} ,$$

molární hmotnost

$$M_m = \frac{m}{n} = \frac{1,250}{0,044} \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 28,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} .$$

OPTIKA

Užitečné vzorce

zákon odrazu: $\alpha = \alpha'$; úhel odrazu se rovná úhlu dopadu

zákon lomu (Snellův zákon): $\sin \alpha / \sin \beta = n_2/n_1$; α je úhel dopadu, β je úhel lomu, n_1, n_2 jsou absolutní indexy lomu dvou prostředí, na jejichž rozhraní k lomu dochází

Zobrazovací rovnice pro optickou soustavu: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$;

je-li optická soustava kulové zrcadlo, je $\frac{1}{f} = \frac{2}{r}$,

je-li optická soustava tenká čočka, je $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$;

r je poloměr kulové plochy zrcadla,

r_1, r_2 jsou poloměry kulových ploch čočky,

f je ohnisková vzdálenost,

n_2 je absolutní index lomu čočky, n_1 je absolutní index lomu prostředí

příčné zvětšení: $z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a} = -\frac{a'-f}{f} = -\frac{f}{a-f}$

$y' > 0$ a $y > 0$ nad optickou osou, $y' < 0$ a $y < 0$ pod optickou osou;

(pro $z > 0$ je obraz přímý, pro $z < 0$ je obraz převrácený;

pro $|z| > 1$ je obraz zvětšený, pro $|z| < 1$ je obraz zmenšený)

znaménková konvence pro kulová zrcadla:

a, a', r a f mají před zrcadlem kladnou hodnotu, za zrcadlem zápornou;

(duté zrcadlo má $r > 0$ a $f > 0$, vypuklé zrcadlo má $r < 0$ a $f < 0$;

pro $a' > 0$ je obraz skutečný, pro $a' < 0$ je obraz neskutečný.)

znaménková konvence pro čočky:

$a > 0$ před čočkou, $a < 0$ za čočkou,

$a' > 0$ za čočkou, $a' < 0$ před čočkou,

$r_1 > 0, r_2 > 0$ pro vypuklou kulovou plochu,

$r_1 < 0, r_2 < 0$ pro dutou kulovou plochu,

(je-li $a' > 0$ je obraz skutečný, je-li $a' < 0$ je obraz neskutečný,

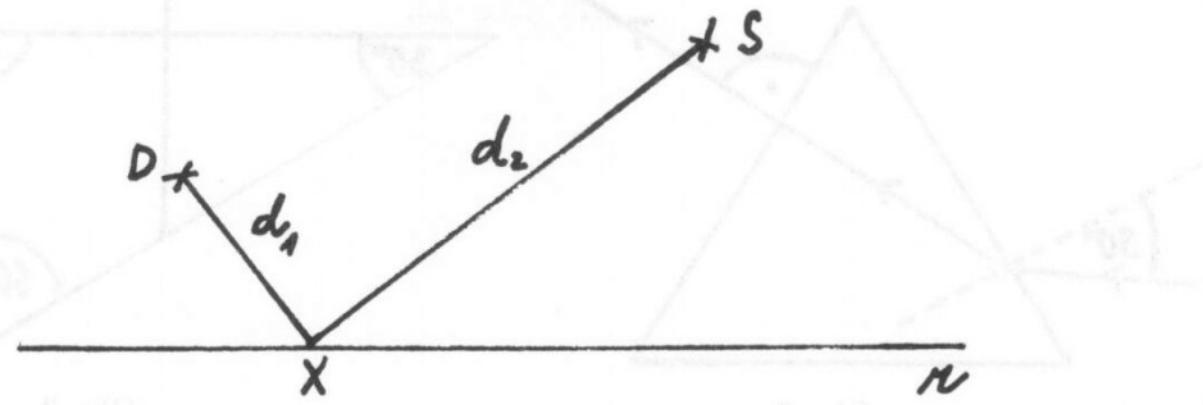
$f > 0$ má spojka, $f < 0$ má rozptylka)

interference světla: interferují koherentní (spolu související) světelné paprsky (vlny);

největší zesílení : $\Delta = k \lambda$,

největší zeslabení: $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, Δ je dráhový rozdíl, λ je vlnová délka světla



Obr. 1.

1. Ve kterém místě na břehu řeky se koupe chlapec, chce-li, aby délka jeho cesty z domu do školy (viz obr.1) byla co nejkratší. Úlohu řešte konstruktivně (nakreslete obrázek). Všimněte si, že pro nejkratší délku chlapcovy cesty jste dostali zákon lomu (Fermatův princip).

2. Odražený a lomený paprsek jsou vzájemně kolmé. Odvodte vztah, který platí pro úhel dopadu α , dopadá-li světlo ze vzduchu do skla, jestliže relativní index lomu sklo - vzduch je $3/2$.

Řešení:

Platí $\sin \alpha / \sin \beta = n_2/n_1$, kde symbolem α je označen úhel dopadu a úhel odrazu, β je úhel lomu, n_1 je absolutní index lomu vzduchu, n_2 je absolutní index lomu skla. Poněvadž $\alpha + \beta + \pi/2 = \pi$, dostaneme, že $\tan \alpha = n_2/n_1$, číselně $\tan \alpha = 3/2$, $\alpha = 56,31^\circ$.

Poznámka: Úhel dopadu α , pro který platí $\tan \alpha = n_2/n_1$, se nazývá Brewsterův úhel a má význam při studiu polarizace světla odrazem. Odražený paprsek, který dopadá pod Brewsterovým úhlem, je úplně polarizovaný.

3. Na rovinné rozhraní dvou prostředí o absolutních indexech lomu n_1 , n_2 dopadá světelný paprsek a částečně se odráží a částečně láme. Jaký je relativní index lomu obou prostředí, jestliže při úhlu dopadu $\alpha = 60^\circ$ svírají spolu odrážený a lomený paprsek pravý úhel?

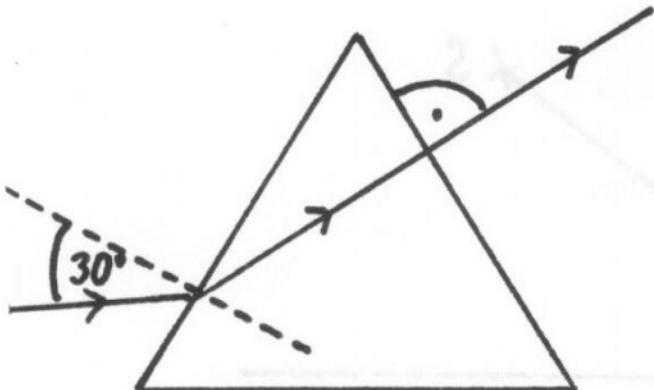
Řešení:

Z výsledku předchozího příkladu víme, že $\tan 60^\circ = n_2/n_1$, $n_2/n_1 = \sqrt{3} \doteq 1,73$.

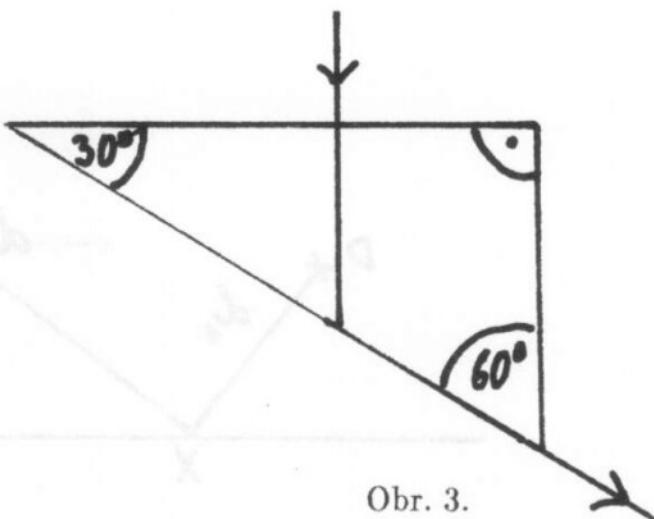
4. Na hranol o rovnostranném průřezu z materiálu, jehož absolutní index lomu je n_2 , dopadá z prostředí o absolutním indexu lomu n_1 monochromatický světelný paprsek tak, jak je znázorněno na obr.2. Vypočítejte pro danou vlnovou délku relativní index lomu mezi materiélem hranolu a okolním prostředím.

Řešení:

Úhel dopadu $\alpha = 30^\circ$, úhel lomu $\beta = 60^\circ$, (lom od kolmice, prostředí s indexem lom n_1



Obr. 2.



Obr. 3.

je opticky hustší než prostředí s indexem lomu n_2). Platí tedy $n_2/n_1 = \sin 30^\circ / \sin 60^\circ = 1/\sqrt{3} \doteq 0,577$.

5. Na obr.3 je znázorněn chod monochromatického světelného paprsku skleněným hranolem. Paprsek dopadá na hranol ze vzduchu. Vypočítejte index lomu skla pro danou vlnovou délku.

Řešení:

Označme symbolem n_1 absolutní index lomu skla, symbolem n_2 absolutní index lomu vzduchu, $n_2 \doteq 1$, symbolem α úhel dopadu zadaného paprsku na rozhraní sklo - vzduch, symbolem β jeho úhel lomu ze skla do vzduchu. Úhel dopadu $\alpha = 30^\circ$, úhel lomu $\beta = 90^\circ$. Platí tedy, že $\sin 30^\circ = n_2/n_1$ neboli $n_1 \doteq 2$.

6. Duté zrcadlo má poloměr křivosti $r = 40$ cm. Najděte polohu předmětu, ve které je obraz skutečný, dvakrát zvětšený. V rozumném měřítku nakreslete obrázek, do zjištěné polohy umístěte předmět ve tvaru šipky kolmé k optické ose a zkonztruujte jeho obraz.

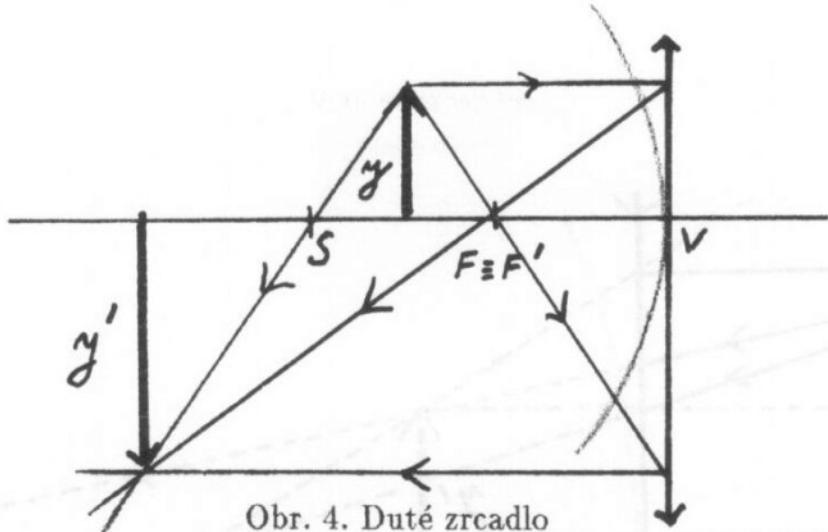
Řešení:

Poloměr křivosti zrcadla $r = 40$ cm, ohnisková vzdálenost $f = r/2 = 20$ cm. Obraz má být skutečný, dvakrát zvětšený, musí tedy být vzdálenost obrazu od zrcadla $a' > 0$ a zvětšení $z = -2$. Dosazením do zobrazovací rovnice pro zrcadla $1/a + 1/a' = 2/r$ a do rovnice pro zvětšení $z = y'/y = -a'/a$ dostaneme pro vzdálenost předmětu od zrcadla $a = 30$ cm a pro vzdálenost obrazu od zrcadla $a' = 60$ cm. Konstrukce obrazu k danému předmětu je nakreslena na obr.4.

7. Duté zrcadlo má poloměr křivosti 100 cm. Předmět je v rovině kolmé k optické ose ve vzdálenosti 60 cm od vrcholu zrcadla. Určete zvětšení obrazu, jeho druh a polohu. Graficky znázorněte.

Řešení:

$a = 60$ cm, $f = r/2 = 50$ cm. Dosazením do zobrazovací rovnice pro zrcadla dostaneme $a' = 300$ cm a dosazením do vztahu pro zvětšení dostaneme $z = -5$. Obraz je tedy 300 cm před zrcadlem, skutečný, pětkrát zvětšený. Konstrukce obrazu k danému předmětu je nakreslena na obr.5.



mětu je podobná konstrukci nakreslené na obr.4.

8. Vypuklé zrcadlo má poloměr křivosti 100 cm. Předmět je v rovině kolmě k optické ose ve vzdálenosti 50 cm od vrcholu zrcadla. Určete druh a vzdálenost obrazu od vrcholu zrcadla a jeho zvětšení. Výsledek graficky znázorněte.

Řešení:

Poloměr křivosti vypuklého zrcadla $r = -100$ cm, ohnisková vzdálenost $f = r/2 = -50$ cm, vzdálenost předmětu od zrcadla $a = 50$ cm. Dosazením do zobrazovací rovnice pro zrcadla dostaneme vzdálenost předmětu od zrcadla $a' = -25$ cm a dosazením do vztahu pro zvětšení dostaneme zvětšení $z = 1/2$. Obraz je tedy přímý, dvakrát zmenšený, neskutečný a je ve vzdálenosti 25 cm za zrcadlem. Konstrukce obrazu k danému předmětu je provedena na obr.5.

Poznámka: Obrazy ve vypuklém zrcadle jsou vždy zmenšené, přímé a neskutečné.

9. Před tenkou spojkou o ohniskové vzdálenosti 20 cm umístíme předmět do vzdálenosti 25 cm. V jaké vzdálenosti od čočky a na jaké straně se vytvoří obraz? Polohu obrazu nalezněte jednak výpočtem jednak konstrukcí. Popište vlastnosti obrazu.

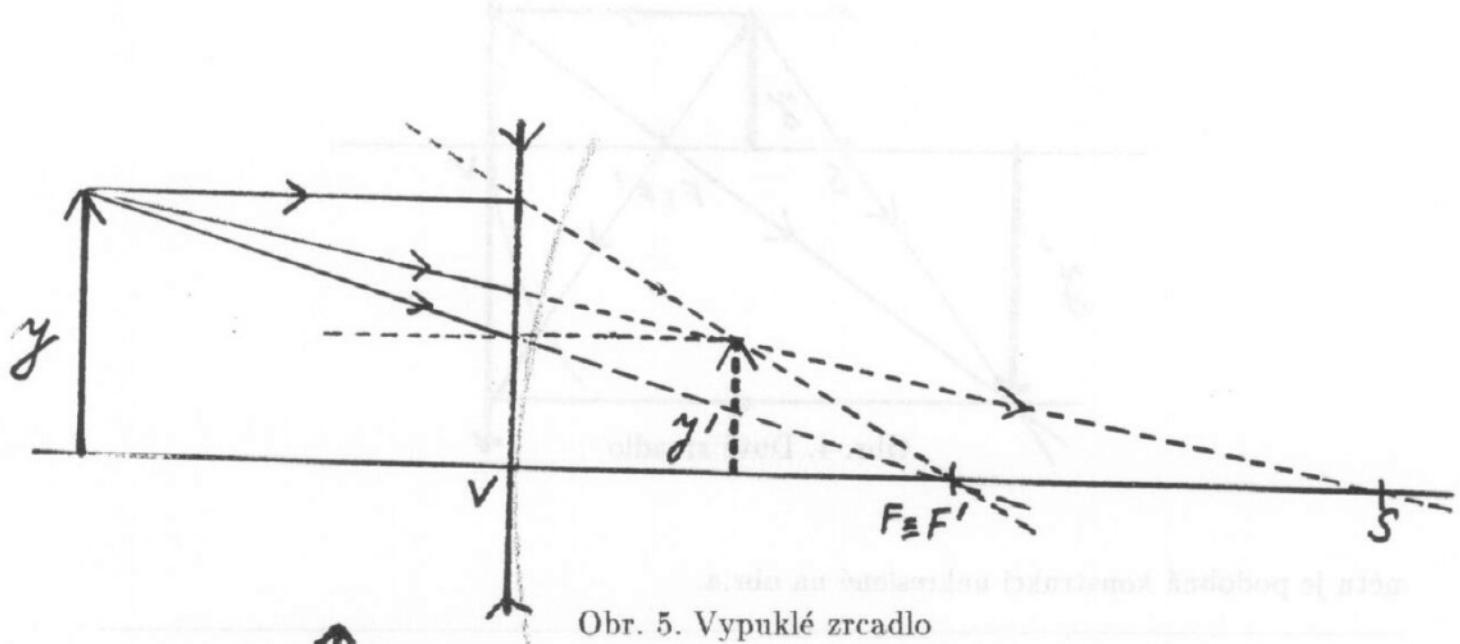
Řešení:

Ohnisková vzdálenost $f = 20$ cm, vzdálenost předmětu od čočky $a = 25$ cm. Dosazením do zobrazovací rovnice pro čočky dostaneme pro vzdálenost obrazu od čočky $a' = 100$ cm. Obraz se vytvoří ve vzdálenosti 100 cm za čočkou, bude skutečný, převrácený, zvětšený. Konstrukce obrazu k danému předmětu je nakreslena na obr.6.

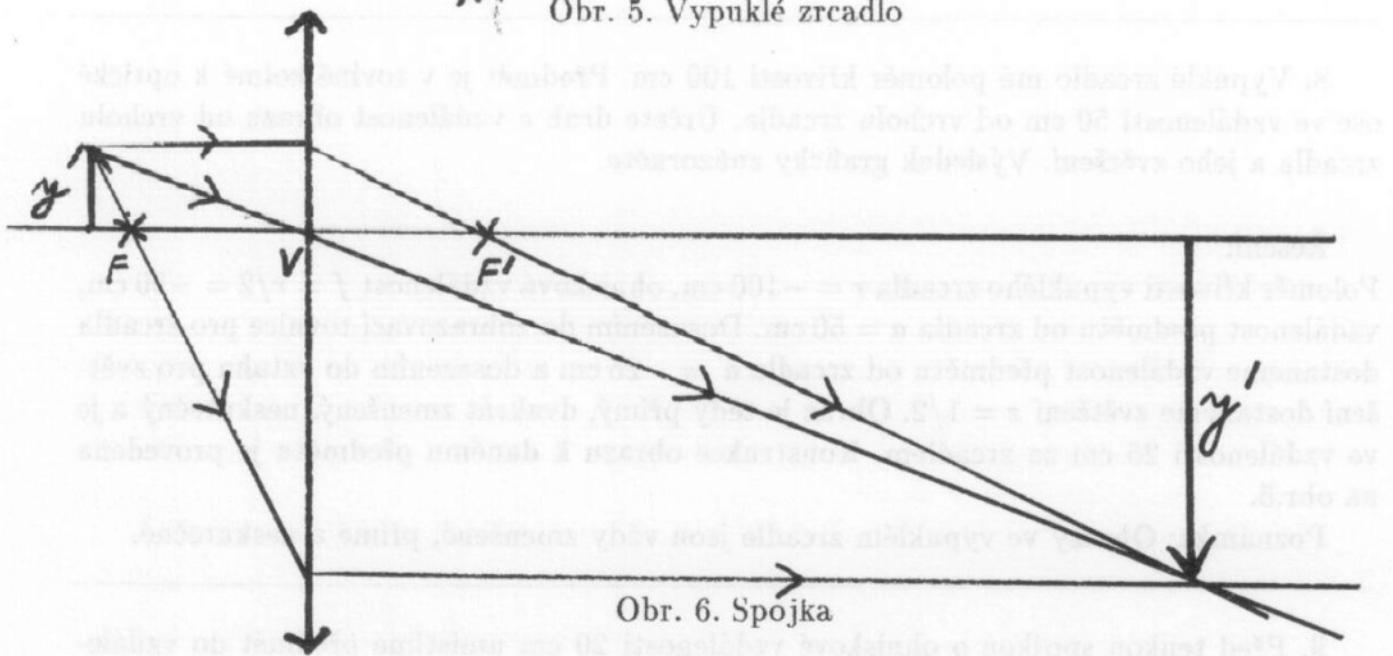
10. Předmět je umístěn ve vzdálenosti $3f/2$ od spojky, kde f je její ohnisková vzdálenost. V jaké vzdálenosti od čočky vznikne obraz a jaké bude jeho zvětšení? V rozumném měřítku nakreslete obrázek a graficky zkonztruujte k danému předmětu obraz.

Řešení:

Předmět je umístěn před předmětovým ohniskem čočky, konstrukce obrazu je stejná jako v předcházejícím příkladě (viz obr.6). Platí $a = 3f/2$, dosazením do čočkové rovnice



Obr. 5. Vypuklé zrcadlo



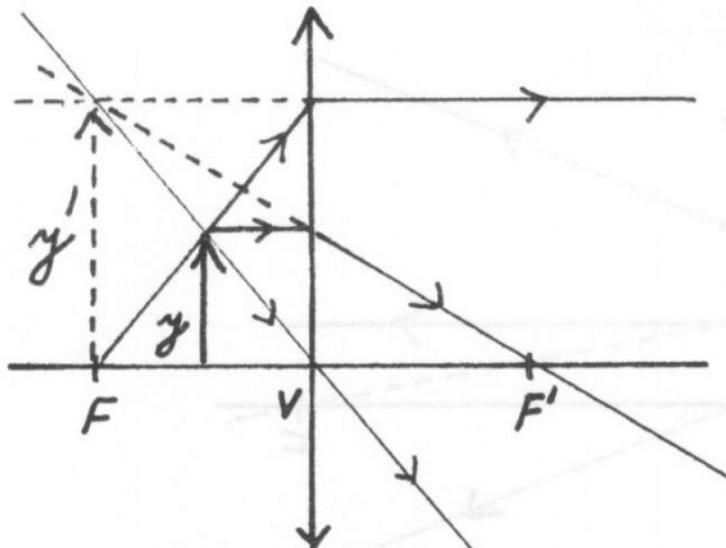
Obr. 6. Spojka

dostaneme $a' = 3 f$. Zvětšení $y'/y = -a'/a = -2$. Obraz je skutečný, převrácený, dvakrát zvětšený, ve vzdálenosti $a' = 3 f$ od čočky.

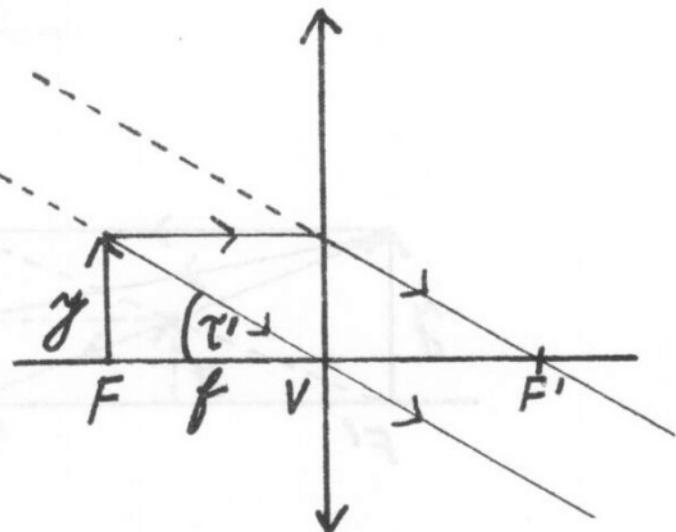
11. Spojná čočka o ohniskové vzdálenosti $f = 10 \text{ cm}$ je užita jako lupa. Zkonstruujte obraz předmětu ve tvaru šipky kolmé k optické ose spojky, který je ve vzdálenosti $a = 5 \text{ cm}$ od čočky a napište, jaké jsou vlastnosti obrazu.

Řešení:

Použijeme-li spojnou čočku jako lupy, musíme umístit předmět mezi čočku a ohnisko. V našem případě je $f = 10 \text{ cm}$ a $a = 5 \text{ cm}$. Dosazením do čočkové rovnice získáme $a' = -10 \text{ cm}$ a dosazením do vztahu pro zvětšení získáme $z = 2$. Obraz je tedy neskutečný, vzpřímený, dvakrát zvětšený a vytvoří se ve vzdálenosti 10 cm před čočkou. Konstrukce obrazu je znázorněna na obr.7.



Obr. 7.



Obr. 8.

12. Optická mohutnost lupy je 20 dioptrií. Do jaké vzdálenosti musíte umístit předmět, pozorujete-li jej okem akomodovaným na nekonečno? Vypočítejte zvětšení této lupy.

Řešení:

Chceme-li pozorovat předmět okem akomodovaným na nekonečno, musíme ho umístit do ohniskové roviny spojky. Pak jej uvidíme pod zorným úhlem τ' , pro který platí $\operatorname{tg} \tau' = y/f$, kde f je ohnisková vzdálenost spojky a y velikost předmětu ve tvaru šipky kolmé k optické ose (viz obr.8). Tentýž předmět uvidíme neozbrojeným okem v konvenční zrakové dálce $l = 25$ cm pod zorným úhlem τ , pro který platí $\operatorname{tg} \tau = y/l$. Zvětšení lupy je definováno jako

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{\frac{y}{f}}{\frac{y}{l}} = \frac{l}{f} .$$

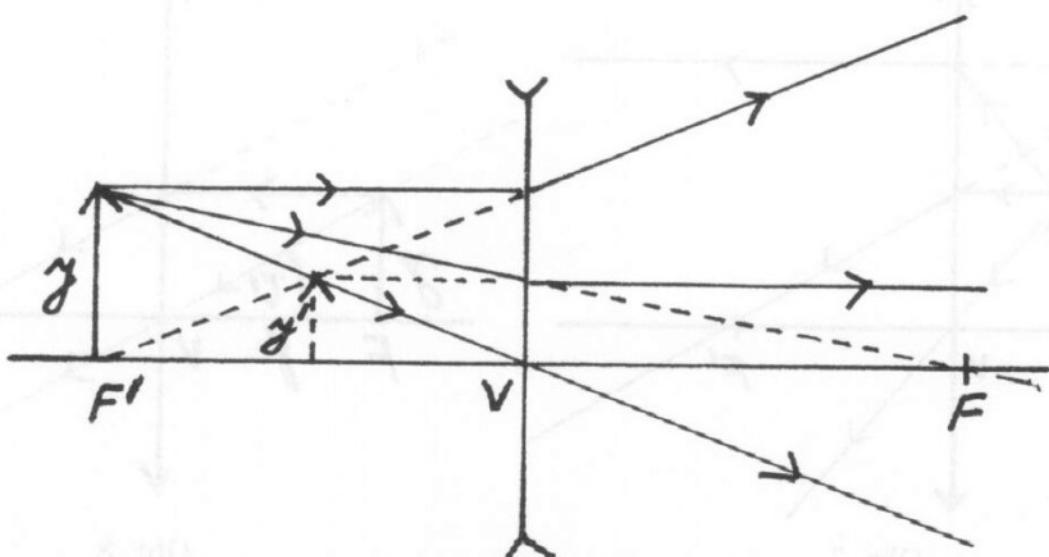
Dosadíme-li za $l = 25$ cm a za $f = \frac{1}{20}$ m = 5 cm, dostaneme pro zvětšení lupy $\gamma = 5$.

13. V jaké vzdálenosti od rozptylky s optickou mohutností 2 dioptrie se vytvoří obraz předmětu, který je ve vzdálenosti 50 cm od rozptylky? Polohu a zvětšení obrazu jednak vypočítejte a jednak obraz zkonztruujte. Slovy popište jeho vlastnosti.

Řešení:

Optická mohutnost rozptylky $D = 2$ dioptrie, její ohnisková vzdálenost je tedy $f = -\frac{1}{2}$ m = -50 cm, vzdálenost předmětu od čočky $a = 50$ cm. Dosazením do zobrazovací rovnice pro čočky dostaneme pro vzdálenost obrazu od čočky $a' = -25$ cm a dosazením do vztahu pro zvětšení dostaneme zvětšení $z = 1/2$. Obraz je tedy neskutečný, přímý, dvakrát zmenšený ve vzdálenosti 25 cm před čočkou. Konstrukce obrazu k danému předmětu je nakreslena na obr.9.

Poznámka: Rozptylkou vzniká vždy přímý, zmenšený a neskutečný obraz.



Obr. 9. Rozptylka

14. Zdroj světla je ve vzdálenosti L od stínítka. Určete, do jaké vzdálenosti a od zdroje je třeba umístit tenkou spojku s ohniskovou vzdáleností f , aby se na stínítku vytvořil reálný obraz zdroje. Uveďte všechna řešení.

Řešení:

Zadaná situace je schematicky nakreslena na obr.10. Písmenem a je označena vzdálenost předmětu (zdroje) od čočky, písmenem a' vzdálenost obrazu (zachycená na stínítku) od čočky. Dosadíme-li do čočkové rovnice, postupně pro hledanou vzdálenost a dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a} = \frac{1}{f},$$

$$a^2 - La + Lf = 0 \quad ,$$

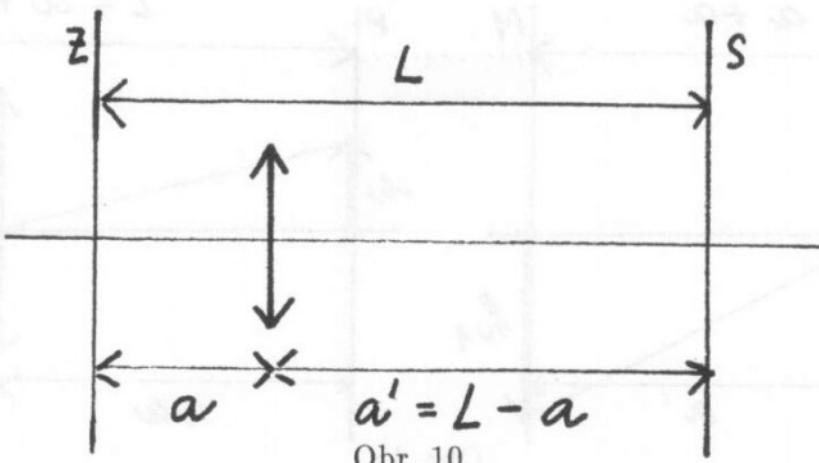
$$a_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lf} \quad .$$

- a) Pro $f > L/4$ ($L < 4f$) nemá rovnice pro a reálné řešení. V žádné poloze čočky se na stínítku nevytvorí reálný obraz zdroje.
- b) Pro $f = L/4$ ($L = 4f$) má rovnice pro a jeden (dvojnásobný) kořen. Reálný obraz se na stínítku vytvori, je-li čočka ve vzdálenosti $a = L/2$ od zdroje.
- c) Pro $f < L/4$ ($L > 4f$) má rovnice dva různé reálné kořeny. Reálný obraz zdroje se vytvori, je-li čočka ve vzdálenosti $a_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - fL}$ od zdroje.

15. Vzdálenost mezi zdrojem a stínítkem $L = 50$ cm. Spojka umístěná mezi nimi vytvoří ostrý obraz na stínítku ve dvou polohách, které jsou od sebe vzdálené $l = 10$ cm. Vypočítejte ohniskovou vzdálenost f čočky.

Řešení:

Z výsledku předchozího příkladu plyne, pokud $L > 4f$, že se ostrý obraz předmětu vytvoří



Obr. 10.

pro dvě různé polohy čočky a_1, a_2 , pro které platí

$$l = a_1 - a_2 = 2 \sqrt{\frac{L^2}{4} - f L} .$$

Odtud pro ohniskovou vzdálenost f čočky dostáváme

$$f = \frac{L^2 - l^2}{4 L} = \frac{50^2 - 10^2}{4 \cdot 50} \text{ cm} = 12 \text{ cm} .$$

Poznámka: Tímto způsobem lze měřit ohniskovou vzdálenost spojek. Uvedená metoda se nazývá Besselova. Je vhodná i pro měření ohniskových vzdáleností tlustých čoček.

16. Předmět o výšce $h = 5 \text{ cm}$ stojí kolmo k optické ose ve vzdálenosti $a = 25 \text{ cm}$ od spojné čočky. Na matnici (stínítku) se vytvoří ostrý obraz předmětu. Posuneme-li čočku o vzdálenost $a = 25 \text{ cm}$ k matnici, vytvoří se opět ostrý obraz. Spočítejte ohniskovou vzdálenost f čočky, vzdálenost d matnice od předmětu a velikosti h_1, h_2 obrazů.

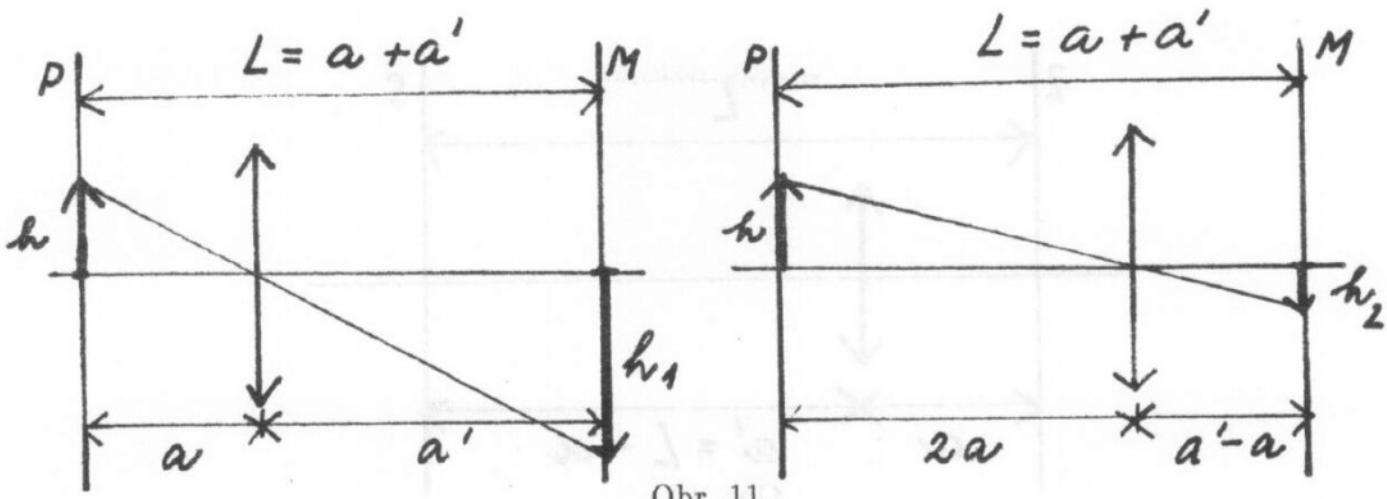
Řešení:

Situace je nakreslena na obr.11. Pro hledané veličiny f a a' (potřebujeme nalézt $L = a + a'$) dostaneme z čočkové rovnice dvě rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} ,$$

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{a' - a} = \frac{1}{f} .$$

Jejich řešením získáme $a' = 2a$ (druhý kořen rovný $-a$ není řešením naší úlohy) a $f = 2a/3$. Ohnisková vzdálenost čočky $f = 16,7 \text{ cm}$, vzdálenost předmětu od matnice $L = 3a = 75 \text{ cm}$. Ze vzorce pro zvětšení čočky $z = y'/y = -a'/a$ dostaneme velikost obrazu $h_1 = 2h = 10 \text{ cm}$ a velikost obrazu $h_2 = h/2 = 2,5 \text{ cm}$.



Obr. 11.

17. Tenká dvojvypuklá čočka o indexu lomu 1,6 má ve vzduchu ohniskovou vzdálenost 10 cm. Jaká bude ohnisková vzdálenost této čočky, umístíme-li ji do průhledného prostředí o indexu lomu a) $n = 1,5$, b) $n = 1,7$? Bude spojkou či rozptylkou?

Řešení:

Pro ohniskovou vzdálenost čočky platí vztah

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ,$$

kde n_2 je absolutní index lomu čočky, n_1 je absolutní index lomu prostředí, r_1 , r_2 jsou poloměry kulových ploch čočky. Dosadíme-li do tohoto vzorce $f = 10 \text{ cm}$, $n_2 = 1,5$, $n_1 = 1$ (okolní prostředí je vzduch), dostaneme $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = (1/6) \text{ cm}^{-1}$.

a) Bude-li index lomu okolního prostředí $n_1 = 1,5$, bude pro ohniskovou vzdálenost f_a čočky platit

$$\frac{1}{f_a} = \left(\frac{1,6}{1,5} - 1 \right) \frac{1}{6} = 0,011 \text{ cm}^{-1} ; \quad f_a = 90 \text{ cm} .$$

b) Bude-li index lomu okolního prostředí $n_1 = 1,7$, bude pro ohniskovou vzdálenost f_b čočky platit

$$\frac{1}{f_b} = \left(\frac{1,6}{1,7} - 1 \right) \frac{1}{6} = -0,0098 \text{ cm}^{-1} ; \quad f_b = -102 \text{ cm} .$$

V případě a) je čočka spojkou, protože její ohnisková vzdálenost $f_a > 0$, v případě b) je čočka rozptylkou, její ohnisková vzdálenost $f_b < 0$.

18. Tenká skleněná spojka má optickou mohutnost 5 dioptrií. Když čočku ponoříme do kapaliny o indexu lomu n_k , chová se jako rozptylka, jejíž ohnisková vzdálenost je -1 m. Určete index lomu kapaliny n_k , je-li index lomu skla $n_s = 1,5$.

Řešení:

Pro řešení použiji vztah z předcházejícího příkladu, do kterého dosadím za $1/f = 5 \text{ dioptrií}$, za $n_2 = n_s = 1,5$ a za $n_1 = 1$. Výraz $(1/r_1 + 1/r_2) = 10 \text{ m}^{-1}$. Index lomu kapaliny n_k pak

vypočítám ze vztahu

$$-1 = \left(\frac{1,5}{n_k} - 1 \right) \cdot 10 \quad ,$$

odkud $n_k = 5/3 = 1,67$.

19. Jak velký bude obraz předmětu vysokého 2 m, který fotografujeme přístrojem o ohniskové vzdálenosti $f = 50$ mm ze vzdálenosti 10 m?

Řešení:

Velikost obrazu $|y'|$ dostaneme ze vztahu pro zvětšení,

$$y' = y \frac{-f}{a-f} = 2 \frac{-50 \cdot 10^{-3}}{10 - 50 \cdot 10^{-3}} \text{ m} = -1,005 \cdot 10^{-2} \text{ m} \doteq -1 \text{ cm} \quad .$$

Velikost obrazu $|y'| \doteq 1 \text{ cm}$.

20. Z jaké vzdálenosti byl vyfotografován strom o výšce 6 m, má-li na obrázku výšku 12 mm? Ohnisková vzdálenost objektivu fotoaparátu je 0,2 m.

Řešení:

Do vztahu pro zvětšení čočky, který je uveden v předcházejícím příkladě, dosadíme $y'/y = z/a$ a spočítáme vzdálenost a stromu od čočky,

$$a = \frac{f(z-1)}{z} = \frac{0,2(-2 \cdot 10^{-3} - 1)}{-2 \cdot 10^{-3}} \text{ m} = 100,2 \text{ m} \quad .$$

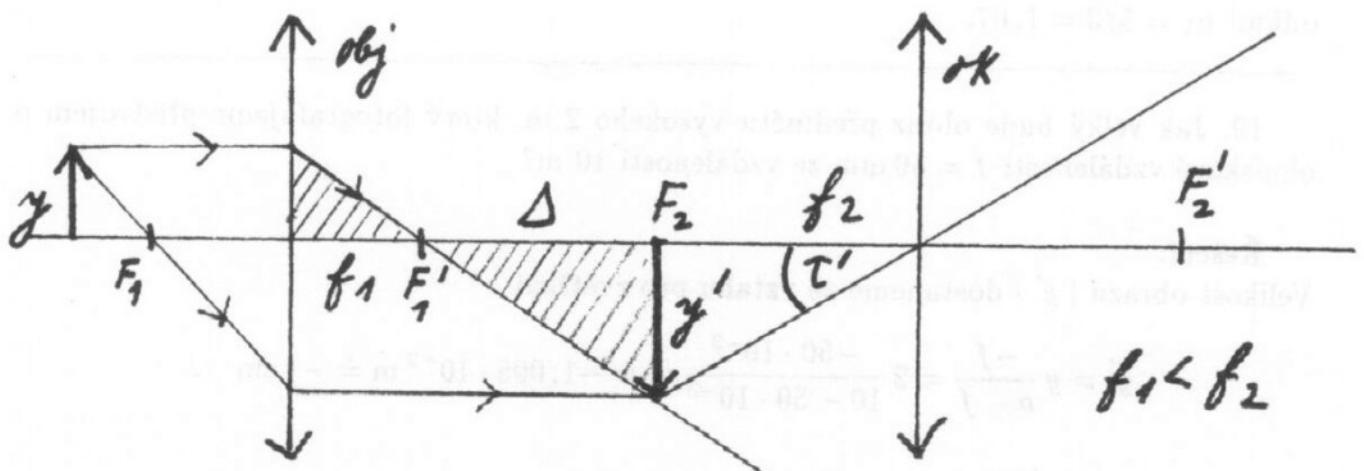
21. Mikroskop se 7 x zvětšujícím okulárem má celkové zvětšení 140. Jaké zvětšení bude mikroskop mít, jestliže v něm zaměníme okulár za jiný, jehož ohnisková vzdálenost je 1 cm? Nakreslete schematicky danou soustavu, před objektiv umístěte předmět a mikroskopem jej zobrazte.

Řešení:

Mikroskop se skládá ze dvou spojních čoček, objektivu o ohniskové vzdálenosti f_1 a okuláru o ohniskové vzdálenosti f_2 , $f_1 < f_2$. Vzdálenost obrazového ohniska objektivu F'_1 od předmětového ohniska okuláru F_2 se značí symbolem Δ a nazývá se optický interval mikroskopu. Schema mikroskopu je nakresleno na obr.12. Pozorovaný předmět s výškou y se klade těsně před předmětové ohnisko F_1 objektivu. Objektiv vytvoří skutečný, převrácený a zvětšený obraz velikosti $-y'$. Předpokládejme, že okulár je v takové vzdálenosti od objektivu, že obraz s výškou y' vzniká v předmětové ohniskové rovině okuláru. Okulár má stejnou funkci jako lupa. Oko vidí neskutečný obraz pod úhlem τ' . Úhlové zvětšení mikroskopu $\gamma = \tau'/\tau$, kde τ je úhel, pod kterým vidí předmět neozbrojené oko z konvenční zrakové vzdálenosti $l = 25$ cm.

Pro úhlové zvětšení γ tedy platí

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{\frac{-y'}{f_2}}{\frac{y}{l}} = \frac{-y'}{y} \cdot \frac{l}{f_2} \quad .$$



Obr. 12. Mikroskop

Z podobnosti vyšrafovovaných trojúhelníků na obr.12 dostaneme vztah $y/f_1 = (-y')/\Delta$ a výraz pro úhlové zvětšení mikroskopu γ můžeme psát v obvyklém tvaru

$$\gamma = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{l}{f_2}$$

Výraz $\Delta/f_1 = z_1$ představuje příčné zvětšení objektivu, výraz $l/f_2 = \gamma_2$ je úhlové zvětšení okuláru.

Nyní konečně můžeme přikročit k řešení příkladu. Je dán úhlové zvětšení mikroskopu $\gamma = 140$ a úhlové zvětšení okuláru $\gamma_2 = 7$. Příčné zvětšení objektivu $z_1 = 20$. Vyměníme-li okulár za jiný, jehož ohnisková vzdálenost je $f_2 = 1$ cm, bude jeho úhlové zvětšení $\gamma_2 = 25$ a úhlové zvětšení mikroskopu $\gamma = z_1 \gamma_2 = 20 \cdot 25 = 500$.

22. Keplerův dalekohled je zaostřen na nekonečno (na pozorování velmi vzdálených předmětů). O jakou vzdálenost je nutno posunout okulár, aby byl dalekohled zaostřen na vzdálenost 5 m? Objektiv dalekohledu je spojná čočka s optickou mohutností 10 dioptrií.

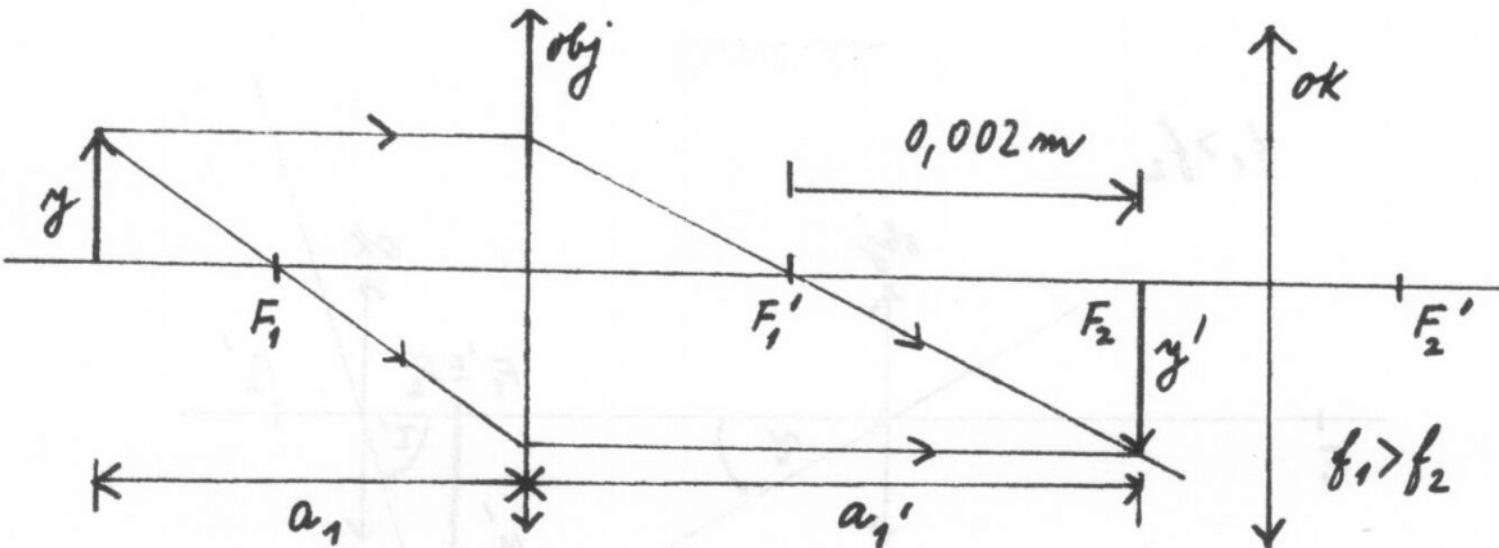
Řešení:

Keplerův dalekohled se skládá ze dvou spojních čoček, objektivu o ohniskové vzdálenosti f_1 a okuláru o ohniskové vzdálenosti f_2 , $f_1 > f_2$, obrazové ohnisko objektivu F'_1 splývá s předmětovým ohniskem okuláru F_2 (viz obr.14).

Je-li předmět v nekonečnu, vzniká obraz v obrazové ohniskové rovině objektivu. Je-li obraz ve vzdálenosti $a_1 = 5$ m od objektivu, vzniká obraz ve vzdálenosti a'_1 , kterou spočítáme z čočkové rovnice pro objektiv (viz obr.13),

$$\frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{a_1} = \left(10 - \frac{1}{5}\right) \text{ m}^{-1},$$

$$a'_1 = 0,102 \text{ m} .$$



Obr. 13. Keplerův dalekohled zaostřený na vzdálenost a_1

Obraz musí padnout vždy do obrazové ohniskové roviny okuláru. Bylo-li tedy zaostřeno napřed na nekonečno, musí pozorovatel posunout okulárem o $0,002\text{ m} = 2\text{ mm}$ směrem k sobě.

23. Keplerův dalekohled se skládá z objektivu o ohniskové vzdálenosti 15 cm a okuláru o ohniskové vzdálenosti 3 cm. Obě čočky pokládejte za tenké. Jaké bude zvětšení dalekohledu, jestliže čočky umístíte do vzdálenosti 18 cm? Nakreslete schematicky danou soustavu a zobrazte chod paprsku.

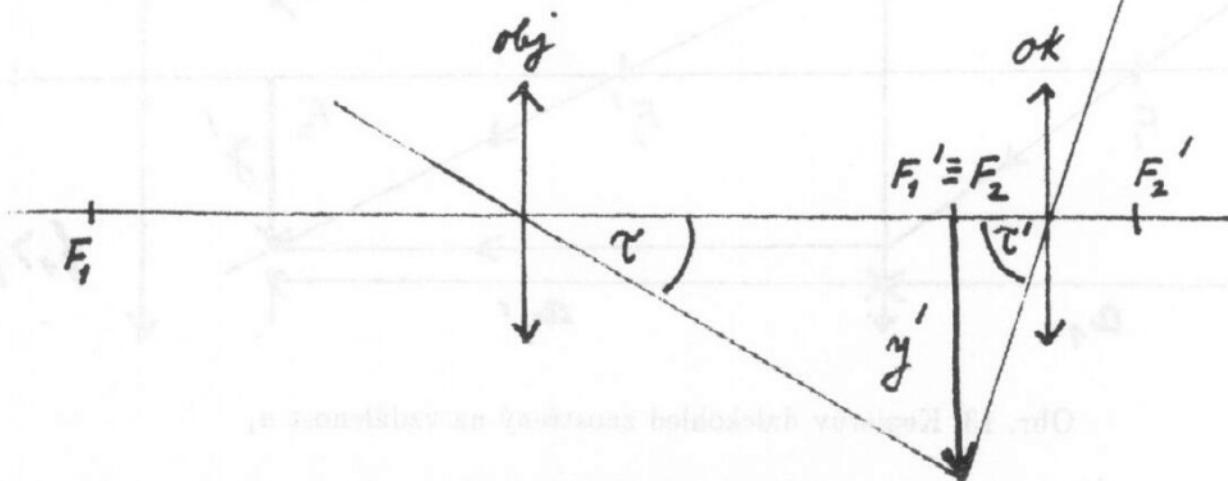
Řešení:

Popis Keplerova dalekohledu je uveden u předcházejícího příkladu, schema soustavy je na obr.14. Objektiv vytvoří skutečný a převrácený obraz výšky y' v obrazové ohniskové rovině objektivu, která je zároveň předmětovou ohniskovou rovinou okuláru. Obraz výšky y' je předmětem pro okulár a neakomodované oko (oko akomodované na nekonečno) jej vidí pod úhlem τ' . Pro úhlové zvětšení platí (viz obr.14)

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{\frac{y'}{f_2}}{\frac{y}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

V našem případě $f_1 = 15\text{ cm}$, $f_2 = 3\text{ cm}$ a úhlové zvětšení dalekohledu $\gamma = 5$.

$$f_1 > f_2$$



Obr. 14. Keplerův dalekohled

24. Na dvě velmi úzké rovnoběžné štěrbiny v neprůhledném stínítku vzdálené od sebe $d = 1 \text{ mm}$ dopadá kolmo roviná monochromatická světelná vlna. Ve vzdálenosti $L = 2 \text{ m}$ od štěrbin je umístěno stínítko. Na stínítku vzniknou světlé a tmavé proužky rovnoběžné se štěrbinami a stejně od sebe vzdálené. Vzdálenost dvou sousedních světlých proužků je $l = 1 \text{ mm}$. Vypočítejte vlnovou délku dopadajícího světla.

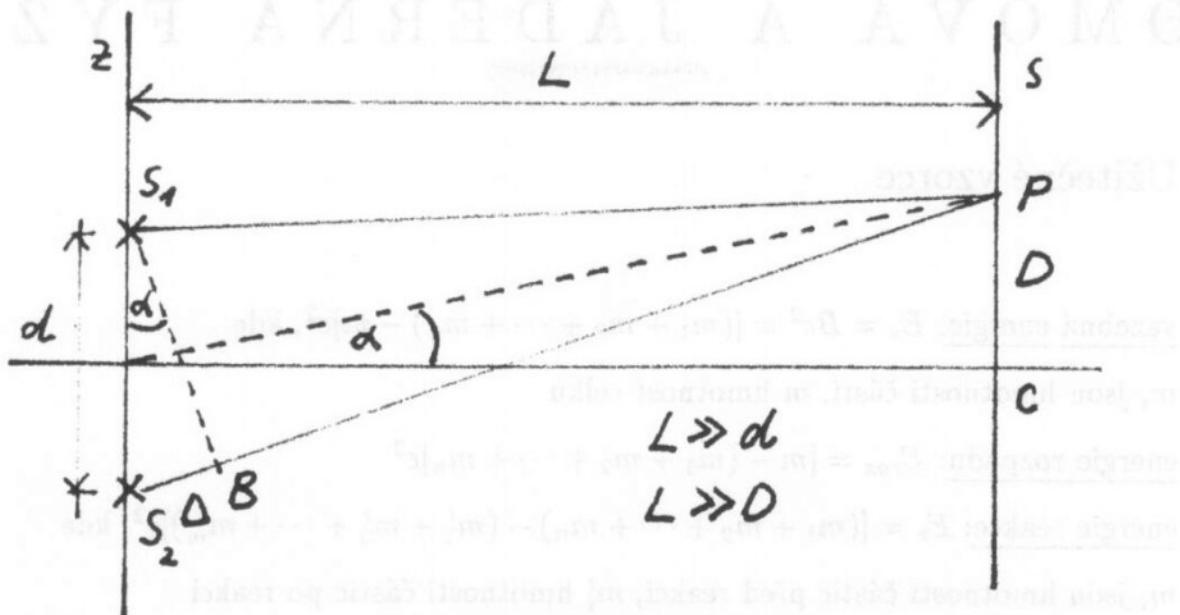
Řešení:

Na obr. 15 je nakresleno schema popsaného pokusu, který se nazývá Youngův. Poprvé byl proveden v r. 1801. Je pokládán za důkaz vlnového charakteru světla. Na základě změření tří délek, vzdálenosti štěrbin d a vzdálenosti štěrbin od stínítka L a vzdálenosti dvou sousedních světlých nebo tmavých proužků, je možné vypočítat vlnovou délku λ dopadajícího světla.

Chceme zjistit interferenci v bodě P, jehož vzdálenost od bodu C je D . Předpokládáme, že $L \gg d$ a $L \gg D$. Význam symbolů je uveden na obr. 15. Paprsky $S_1 P$, $S_2 P$ jsou spolu prakticky rovnoběžné a svírají s osou štěrbin úhel α . Jejich dráhový rozdíl $\Delta = S_2 B - S_1 B$ a platí pro něj

$$\Delta = d \sin \alpha, \quad \text{kde} \quad \sin \alpha \doteq \tan \alpha \doteq \frac{D}{L} .$$

Ve všech bodech, pro které je $d \sin \alpha = k \lambda$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) nastává maximum osvětlení, pro body, pro které platí $d \sin \alpha = (2k+1)\lambda/2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) nastává minimum osvětlení. V důsledku toho se na stínítku objeví střídavě světlé a tmavé proužky rovnoběžné se štěrbinami. Vzdálenost mezi dvěma sousedními světlými nebo tmavými proužky nezávisí na čísle k (řád interference) a je rovna $D_{k+1} - D_k = \frac{\lambda L}{d}$. Uvedený jev se nazývá Youngův. (Kromě toho v okrajových částech světelného jevu pozorujeme další světlé a tmavé pruhy, jejichž vznik uvedená elementární teorie nevysvětluje. Tyto pruhy vznikají ohybem světla na štěrbinách S_1 a S_2 a liší se od vlastních Youngových proužků tím, že jejich poloha závisí na šířce štěrbin, nezávisí na jejich vzdálenosti a že mají menší intenzitu a větší šířku.)



Obr. 15. Youngův pokus

Přistoupíme k řešení příkladu:

Je zadáno

$$D_{k+1} - D_k = l = 1 \text{ mm}, \quad L = 2 \text{ m}, \quad d = 1 \text{ mm},$$

odkud pro vlnovou délku světla λ dostáváme

$$\lambda = \frac{dl}{L} = \frac{10^{-3} \cdot 10^{-3}}{2} \text{ m} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 500 \text{ nm}.$$

25. Na dvě velmi úzké rovnoběžné štěrbiny v neprůhledném stínítku dopadá kolmo rovinná monochromatická svěelná vlna s vlnovou délkou $\lambda = 400 \text{ nm}$ (fialové světlo). Ve vzdálenosti 3 m je umístěno stínítko, na kterém pozorujeme interferenci. Maximum interference 2. řádu je vzdáleno od hlavního maxima o 4,8 mm. Vypočítejte vzdálenost štěrbin v neprůhledném stínítku.

Řešení:

Platí

$$D_2 - D_0 = \frac{2\lambda L}{d} = 4,8 \text{ mm}, \quad L = 3 \text{ m}, \quad \lambda = 400 \text{ nm}.$$

Význam symbolů je stejný jako v př. 24.

Pro vzdálenost štěrbin d tedy dostáváme

$$d = \frac{2\lambda L}{D_2 - D_0} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 10^{-9} \cdot 3}{4,8 \cdot 10^{-3}} \text{ m} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,5 \text{ mm}.$$

ATOMOVÁ A JADERNÁ FYZIKA

Užitečné vzorce

vazebná energie: $E_v = Bc^2 = [(m_1 + m_2 + \dots + m_n) - m]c^2$, kde

m_i jsou hmotnosti částí, m hmotnost celku

energie rozpadu: $E_{roz} = [m - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)]c^2$

energie reakce: $E_r = [(m_1 + m_2 + \dots + m_n) - (m'_1 + m'_2 + \dots + m'_m)]c^2$, kde

m_i jsou hmotnosti částic před reakcí, m'_i hmotnosti částic po reakci

energie a hybnost částice: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = T + mc^2$, $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$,

kde m je klidová hmotnost a T kinetická energie

energie a hybnost fotonů: $E = hf$, $p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$, h je Planckova konstanta

Einsteinova rovnice pro fotoefekt: $hf = W_v + T$, $f_0 = \frac{W_v}{h}$, $\lambda_0 = \frac{hc}{W_v}$, kde

W_v je výstupní práce, f_0 , λ_0 mezní frekvence a vlnová délka

de Broglieova vlna: $f = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}$, $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

Bohrova kvantovací podmínka: $2\pi mvr = nh$, $n = 1, 2, 3, \dots$

energetické hladiny částice vázané na úsečku délky l : $E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2$

energetické hladiny elektronu v atomu vodíku: $E_n = -\frac{hR_f}{n^2} = -\frac{E_1}{n^2}$, kde R_f je

Rydbergova frekvence, $E_1 = 13,6$ eV je Rydbergova energie

kvantum vyzářené (pohlcené) energie: $f_{mn} = E_n - E_m$

frekvence vodíkového spektra: $f = R_f \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, $n > m$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$

poloměr atomového jádra: $R = R_0 A^{1/3}$, $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ m, A je nukleonové číslo

vazebná energie atomového jádra: $E_j = (Zm_p + Nm_n - m_j)c^2$, $\varepsilon_j = \frac{E_j}{A}$, kde

Z je protonové číslo, N neutronové číslo, m_p hmotnost protonu, m_n hmotnost neutronu,

m_j hmotnost jádra, ε_j nukleonová vazebná energie

zákon radioaktivní přeměny: $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, kde λ je

přeměnová konstanta a T je poločas přeměny

pokles aktivity zářiče: $A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$

základní atomové konstanty:

| | |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| rychlosť svetla ve vakuu | $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ (přesně) |
| Avogadrova konstanta | $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ |
| elementární náboj | $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ |
| Planckova konstanta | $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ |
| Boltzmannova konstanta | $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ |
| molární objem ideálního plynu | $V_0 = 0,022\,4 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ (při 273,15 K a 101,3 kPa) |
| Rydbergova frekvence | $R_f = 3,290 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ |
| Bohrův poloměr | $r_0 = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ |
| atomová hmotnostní konstanta | $m_u = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad m_u c^2 = 931,50 \text{ MeV}$ |
| klidová hmotnost elektronu | $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad A_r = 0,000\,549, \quad m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ |
| klidová hmotnost protonu | $m_p = 1,672\,62 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad A_r = 1,007\,3, \quad m_p c^2 = 938,27 \text{ MeV}$ |
| klidová hmotnost neutronu | $m_n = 1,674\,95 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad A_r = 1,008\,7, \quad m_n c^2 = 939,57 \text{ MeV}$ |
| klidová hmotnost částice alfa | $m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad A_r = 4,001\,506, \quad m_\alpha = 3\,726,2 \text{ MeV}$ |

relativní atomové hmotnosti

| nuklid | A_r |
|---------------------|-------------|
| ${}^1\text{H}$ | 1,007 825 |
| ${}^2\text{H}$ | 2,014 102 |
| ${}^3\text{H}$ | 3,016 045 |
| ${}^3\text{He}$ | 3,016 030 |
| ${}^4\text{He}$ | 4,002 604 |
| ${}^6\text{Li}$ | 6,015 123 |
| ${}^{12}\text{C}$ | 12 přesně |
| ${}^{56}\text{Fe}$ | 55,934 935 |
| ${}^{106}\text{Pd}$ | 105,903 481 |
| ${}^{238}\text{U}$ | 238,050 812 |

vazebná energie na jeden nukleon

| jádro | ε_j [MeV] |
|---------------------|-----------------------|
| ${}^2\text{H}$ | 1,11 |
| ${}^3\text{H}$ | 2,83 |
| ${}^3\text{He}$ | 2,57 |
| ${}^4\text{He}$ | 7,07 |
| ${}^6\text{Li}$ | 5,33 |
| ${}^7\text{Li}$ | 5,60 |
| ${}^{12}\text{C}$ | 7,67 |
| ${}^{56}\text{Fe}$ | 8,79 |
| ${}^{209}\text{Bi}$ | 7,85 |
| ${}^{238}\text{U}$ | 7,59 |

předpony násobků základních jednotek

| název | značka | násobek | název | značka | násobek |
|-------|--------|-----------|-------|--------|------------|
| exa | E | 10^{18} | mili | m | 10^{-3} |
| peta | P | 10^{15} | mikro | μ | 10^{-6} |
| tera | T | 10^{12} | nano | n | 10^{-9} |
| giga | G | 10^9 | piko | p | 10^{-12} |
| mega | M | 10^6 | femto | f | 10^{-15} |
| kilo | k | 10^3 | atto | a | 10^{-18} |

$$1 \text{ elektronvolt} = 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ siderický (hvězdný) rok} = 365,256 \text{ d} = 3,155 \cdot 10^7 \text{ s} \approx \pi \cdot 10^7 \text{ s}$$

1. Energie vazby molekuly H_2 je 4,48 eV. Je to energie, kterou je nutné dodat H_2 , aby se rozdělila na dva atomy H. V chemii se vazebná energie vyjadřuje obvykle v jednotkách $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Jaká je vazebná energie molekuly vodíku v těchto jednotkách? (1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J) .

Řešení:

Počet molekul H_2 v látkovém množství jednoho molu je roven Avogadrovy konstantě $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Tomuto množství odpovídá vazebná energie

$$E = N_A \cdot E_v = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 4,48 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 432 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

Vazebná energie molekuly vodíku je $432 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

2. Energie vazby molekuly H_2 je 4,48 eV. Je to energie, kterou je nutné dodat H_2 , aby se rozdělila na dva atomy H. Jakou největší vlnovou délku musí mít záření, které je schopné rozdělit molekulu vodíku na dva atomy?

Řešení:

Dosadíme-li do Planckova vztahu $E = hf$ za frekvenci $f = \frac{c}{\lambda}$, dostáváme vztah $E = \frac{hc}{\lambda}$. Odtud (1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J)

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,48 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 277 \text{ nm}.$$

Největší vlnová délka záření, které je schopné rozdělit molekulu vodíku na dva atomy je 277 nm.

3. Vzduch o objemu 1 litr má za normálních podmínek hmotnost přibližně 1,3 g. Odhadněte řádově, jakou část objemu zaujímají molekuly. Objem jedné molekuly je asi $2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$.

Řešení:

Cílem je vypočítat poměr $\Delta V/V$, kde ΔV je objem, který zaujímají molekuly vzduchu a $V = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$. Objem ΔV obdržíme, vynásobíme-li počet molekul N obsažených v jednom litru objemem jedné molekuly $V_0 = 2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$, tj. $\Delta V = N \cdot V_0$. Počet molekul N můžeme určit dvojím způsobem:

a) Předpokládejme, že vzduch je tvořen pouze molekulami dusíku $^{14}\text{N}_2$ a kyslíku $^{16}\text{O}_2$. Průměrná molární hmotnost A_r je rovna $1/2 (2.14+2.16)=30 \text{ g}$ a obsahuje N_A molekul (N_A je Avogadrova konstanta). Průměrná hmotnost jedné molekuly je rovna $\mu = A_r/N_A$. V objemu jednoho litru vzduchu je $1,3/\mu$ molekul, tj.

$$N = \frac{1,3}{\mu} = \frac{1,3}{A_r} N_A = \frac{1,3}{30} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 2,6 \cdot 10^{22} \text{ molekul.}$$

d) plošná hmotnost fólie

$$d_m = \rho d = 19,3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 1,93 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^{-2}.$$

7. Vypočítejte rychlosť elektronu v atomu vodíku na jeho první kvantové dráze.

Řešení:

Dostředivá síla působící na elektron je realizována elektrostatickou silou protonu:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}. \quad (1)$$

Dále užijeme Bohrovu kvantovací podmínku

$$2 \pi m v r = n h, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Dosadíme-li za poloměr r do rovnice (2) z rovnice (1), dostaneme hledaný vztah (pro $n = 1$):

$$v_1 = \frac{e^2}{2 h \epsilon_0} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \approx 2,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

Rychlosť elektronu na první kvantové dráze je rovna $2,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$.

8. Mion μ^- ($m_\mu = 207 m_e$) může být zachycen protonem a vznikne "mionový atom". Vypočítejte poloměr první Bohrových oběžných drážek pro miony a porovnejte s poloměrem atomu vodíku.

Řešení:

Dostředivá síla působící na mion je realizována elektrostatickou silou protonu:

$$\frac{m_\mu v^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}. \quad (1)$$

Dále užijeme Bohrovu kvantovací podmínku

$$2 \pi m_\mu v r = n h, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

připadá objem $V_0 = 1/n$. Za předpokladu kulového tvaru atomu $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$ a průměr atomu je tedy roven

$$D = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi \cdot n}} = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot A_r}{4\pi \cdot \rho \cdot N_A}} = 2\sqrt[3]{\frac{3.196,967}{4.3,14.19,3.10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}} = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Za předpokladu, že ve folii jsou atomy uspořádány těsně vedle sebe, je folie tloušťky d tvořena

$$n = \frac{d}{D} = \frac{10^{-6}}{3,2 \cdot 10^{-10}} = 3125 \text{ atomovými vrstvami.}$$

5a. Odhadněte průměr atomu železa. Jest $\rho = 7860 \text{ kg.m}^{-3}$, $A_r = 55,85$. Vyjděte z představy těsného uspořádání atomů v mříži.

Řešení:

Látkové množství 1 kilomolu železa obsahuje N_A atomů a jeho molární hmotnost je rovna $A_r = 55,85 \text{ kg}$. Poměr $\mu = A_r/N_A$ udává hmotnost jednoho atomu. Počet atomů v 1 m^3 je roven $n = \rho/\mu = \rho N_A/A_r$. Předpokládáme-li, že objem 1 m^3 je vyplněn atomy kulového tvaru v těsném uspořádání, můžeme psát $n \cdot V_0 = 1$, kde $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$ je objem jednoho atomu s poloměrem R . Průměr atomu železa je pak roven

$$D = 2R = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n}} = 2\sqrt[3]{\frac{3 \cdot A_r}{4\pi \cdot \rho \cdot N_A}} = 2\sqrt[3]{\frac{3.55,85}{4.3,14.7860.6,02 \cdot 10^{26}}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Průměr atomu železa je roven $2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

6. Rutherford se svými spolupracovníky používali při rozptylových experimentech s částicemi alfa zlatou fólií tloušťky $d = 1 \mu\text{m}$. Vypočítejte a) objemovou hustotu atomů zlata, b) plošnou hustotu atomových jader, c) objemovou hustotu elektronů, d) plošnou hmotnost fólie. Pro zlato $\rho = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $A_r = 196,967$, $Z = 79$.

Řešení:

a) objemová hustota atomů zlata

$$n = \frac{\rho N_A}{A_r} = \frac{19,3 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}{196,967} = 5,9 \cdot 10^{28} \text{ atomů/m}^3.$$

b) plošná hustota atomových jader

$$n_s = n \cdot d = 5,9 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6} = 5,9 \cdot 10^{22} \text{ jader/m}^2.$$

c) objemová hustota elektronů

$$n_e = n Z = 5,9 \cdot 10^{28} \cdot 79 = 4,66 \cdot 10^{30} \text{ elektronů/m}^3.$$

10. Najděte vlnovou délku spektrální čáry H_{α} Balmerovy serie odpovídající přechodu v atomu vodíku ze stavu $n = 3$ do stavu $n = 2$. Dále najděte hranu Balmerovy serie.

Řešení:

Frekvence vodíkového spektra jsou určeny vztahem

$$f = R_f \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > m, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots ; \quad R_f - \text{Rydbergova frekvence} .$$

Dosadíme-li za f ze vztahu $\lambda = \frac{c}{f}$, dostáváme

$$\lambda = \frac{c}{R_f \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3 \cdot 10^8}{3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 656,5 \text{ nm} .$$

Hraně serie odpovídá $n = \infty$,

$$\lambda_{hrana} = \frac{c}{R_f \frac{1}{m^2}} = 364,7 \text{ nm} .$$

Vlnová délka spektrální čáry H_{α} je 656,5 nm, hrana serie 364,7 nm.

11. Určete hodnotu největší vlnové délky v Paschenově serii ($n = 3$).

Řešení:

Největší vlnová délka v Paschenově serii odpovídá přechodu elektronu ze stavu $m = 4$ do stavu $n = 3$. Užitím vztahu pro frekvence vodíkového spektra a vztahu mezi frekvencí a vlnovou délkou (viz předchozí příklad), dostaneme

$$\lambda_{max} = \frac{c}{f_{min}} = \frac{c}{R_f \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} = \frac{3 \cdot 10^8}{3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 1875 \text{ nm} .$$

Největší vlnová délka Paschenovy serie je 1 875 nm.

12. Svazkem elektronů bombardujeme atomy vodíku. Jakým potenciálovým rozdílem by musely být elektrony urychleny, aby se emitovala první čára Balmerovy serie ($n = 3 \rightarrow n = 2$) ?

Řešení: Aby se emitovala první čára Balmerovy serie, musí přejít elektrony ze základního stavu ($n = 1$) do vzbuzeného stavu ($m = 3$). Tomuto přechodu odpovídá energie

$$E = h f = h R_f \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 19,4 \cdot 10^{-19} \text{ J} .$$

Dosadíme-li do (2) z (1) za rychlosť v , dostaneme hledaný vztah (pro $n = 1$):

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_\mu} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot (6,626 \cdot 10^{-34})^2}{3,14 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 207 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,57 \cdot 10^{-13} \text{ m}.$$

Poloměr první dráhy mionového atomu je $2,57 \cdot 10^{-13}$ m, tedy o dva řády menší než u atomu vodíku.

9. Kolik energie je zapotřebí k odstranění elektronu ve stavu $n = 2$ z vodíkového atomu?

Řešení:

Energie elektronu je rovna součtu jeho kinetické a potenciální elektrostatické energie, tj.

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (1)$$

Rovnici (1) můžeme dále přepsat na tvar

$$E = - \frac{1}{2} \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (2)$$

uvážíme-li, že dostředivá síla působící na elektron je realizována Coulombovou silou protonu

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}. \quad (3)$$

V rámci Bohrova modelu atomu jsou stabilní ty orbity elektronu, které splňují Bohrovu kvantovací podmínku

$$2 \pi m v r = n h, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Užitím vztahů (3) a (4) upravíme vztah (2) na tvar

$$E_n = \frac{1}{8} \frac{e^4 m}{\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

K odstranění elektronu ze stavu $n = 2$ je zapotřebí dodat energii

$$E = - E_2 = \frac{1}{8} \frac{e^4 m}{\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{8} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{(8,854 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,626 \cdot 10^{-34})^2} \frac{1}{4} = 5,41 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Vyjádříme-li energii E v elektronvoltech ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), dostáváme $E = 3,38 \text{ eV}$.

Energie fotonu:

$$E = h f = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 5,0 \cdot 10^{18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 20,7 \text{ keV}.$$

15a. Vypočítejte vlnovou délku a frekvenci fotonu s energií 100 MeV.

Řešení:

Dostaneme

$$f = \frac{E}{h} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ Hz}, \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,4 \cdot 10^{22}} = 1,25 \cdot 10^{-14} \text{ m}.$$

16. Jakou energii musí mít foton, má-li mít stejnou hybnost jako proton o energii 10 MeV?

Řešení:

Pro hybnost fotonu platí $p_f = \frac{E}{c}$, pro nerelativistický proton $p = \sqrt{2mT}$, kde m , T jsou hmotnost a kinetická energie protonu, E energie fotonu. Podle zadání příkladu $p_f = p$, takže

$$E = p_f c = c \sqrt{2mT} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 137 \text{ MeV}.$$

Energie fotonu, který má stejnou hybnost, jako proton o energii 10 MeV, je rovna 137 MeV.

17. Kolik fotonů za sekundu emituje desetiwattová žlutá žárovka? Předpokládejte, že světlo je monoenergetické s vlnovou délkou 600 nm.

Řešení:

Počet fotonů emitovaných za sekundu je roven výkonu žárovky dělenému energií fotonu:

$$n = \frac{P}{\frac{h c}{\lambda}} = \frac{10 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{19}.$$

Desetiwattová žárovka emituje za sekundu $3 \cdot 10^{19}$ fotonů.

Vyjádříme-li E v elektronvoltech, dostáváme $E = 12,1$ eV. Potenciálový rozdíl je roven $U = \frac{E}{e} = 12,1$ V. K vybuzení první čáry Balmerovy serie je zapotřebí urychlit elektrony potenciálovým rozdílem 12,1 V.

13. Určete de Broglieho vlnovou délku a rychlosť tepelných neutronů, jejichž kinetická energie je rovna 0,025 eV.

Řešení:

Ze vztahu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ dostáváme pro rychlosť neutronu

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,025 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 2\,188 \text{ m.s}^{-1}.$$

De Broglieho vlnová délka tepelného neutronu je rovna

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2\,188} = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,18 \text{ nm}.$$

14. V obrazovce jsou elektrony urychlovány potenciálovým rozdílem $U = 15$ kV. Jaká je de Broglieho vlnová délka těchto elektronů?

Řešení:

K výpočtu použijeme de Broglieho vztah

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 15 \cdot 10^3}} = 1,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Hybnost mv jsme vyjádřili pomocí kinetické energie $T = \frac{1}{2}mv^2$ a $T = eU$. De Broglieho vlnová délka elektronu je rovna 100 nm.

15. Jaká je frekvence, vlnová délka a energie (v eV) rentgenového fotonu s hybností $1,1 \cdot 10^{-23} \text{ kg.m.s}^{-1}$?

Řešení:

Frekvence:

$$f = \frac{pc}{h} = \frac{1,1 \cdot 10^{-23} \cdot 3,0 \cdot 10^8}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 5,0 \cdot 10^{18} \text{ Hz}.$$

Vlnová délka:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \cdot 10^8}{5,0 \cdot 10^{18}} = 60 \text{ pm}.$$

práce, elektron se neuvolní. Mezní frekvence f_0 , od níž začíná probíhat fotoefekt, je určena podmínkou $hf_0 = W_v$. Této frekvenci odpovídá maximální vlnová délka

$$\lambda_2 = \frac{h c}{W_v} = \frac{h c}{\frac{h c}{\lambda_1} - T} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^{-9}} - 0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 341 \text{ nm}.$$

Maximální vlnová délka elmg záření, které může ještě vyvolat fotoefekt je 341 nm.

21. Největší vlnová délka záření, které ještě ve wolframu vyvolá fotoelektrický jev, je $\lambda_0 = 0,275 \mu\text{m}$. Určete

- a) výstupní práci elektronu (v jednotkách J a eV),
- b) maximální rychlosť elektronu při osvětlení wolframu ultrafialovým světlem o vlnové délce $\lambda = 0,180 \mu\text{m}$.

Řešení:

a) Podle Einsteinovy rovnice pro fotoefekt se energie dopadajícího fotonu hf spotřebuje na uvolnění elektronu z kovu (výstupní práce W_v) a zbytek zůstane elektronu jako jeho kinetická energie T . Mezní energie $hf_0 = hc / \lambda_0$, při níž ještě dochází k uvolnění elektronu je právě rovna výstupní práci:

$$W_v = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,275 \cdot 10^{-6}} = 7,23 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4,51 \text{ eV}.$$

b) Dosadíme-li za $T = \frac{1}{2}mv^2$ do Einsteinovy rovnice a vypočítáme-li rychlosť elektronu v , dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{10^6}{0,180} - \frac{10^6}{0,275} \right)} = 9,16 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}.$$

Výstupní práce elektronu z povrchu wolframu je rovna 4,51 eV, maximální rychlosť elektronu je $9,16 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$.

22. Výstupní práce sodíku je 2,3 eV. Jaká je mezní (maximální) vlnová délka světla, které způsobí emisi fotoelektronů ze sodíku? Jaká bude kinetická energie fotoelektronů, jestliže na povrch sodíku dopadne světlo o vlnové délce 200 nm?

Řešení:

Mezní vlnová délka světla λ_0 odpovídá případu, kdy energie fotonu je rovna výstupní práci: $hc / \lambda_0 = W_v$. Odtud

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 540 \text{ nm}.$$

17a. Vysílač o výkonu 1000 W pracuje na frekvenci 880 kHz. Kolik fotonů za sekundu emituje?

Řešení:

Stejným postupem jako v předchozím příkladě dostaneme výsledek $1,7 \cdot 10^{30}$ fotonů za sekundu.

18. Lidské oko vnímá žluté světlo (o vlnové délce 600 nm) již při nepatrném výkonu $1,7 \cdot 10^{-18}$ W. Kolik fotonů přitom dopadá na sítnici oka za sekundu?

Řešení:

Dostáváme

$$n = \frac{P}{\frac{h c}{\lambda}} = \frac{1,7 \cdot 10^{-18} \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 5 \text{ fotonů}.$$

Lidské oko zaregistrouje 5 fotonů za sekundu.

19. Vypočítejte tlak záření výkonového laseru s hustotou zářivého toku $3 \cdot 10^{18}$ W.m $^{-2}$ a porovnejte s tlakem záření slunečního, je-li sluneční konstanta $1,4 \cdot 10^3$ W.m $^{-2}$.

Řešení:

Nejprve nalezneme vztah mezi tlakem záření P a hustotou zářivého toku J . Protože fotony mají hybnost $p = \frac{E}{c}$ a síla je podle druhého Newtonova zákona rovna $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, dostaneme pro velikost síly působící na jednotkovou část plochy ΔS vztah

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{\Delta S} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta S} \frac{1}{c} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{c} J.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu, dostáváme pro laser $P_l = 3 \cdot 10^{18} / 3 \cdot 10^8 = 10^{10}$ Pa, a pro Slunce $P_S = 1,4 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^8 = 4,7 \cdot 10^{-6}$ Pa. Poměr $P_l/P_S = 10^{10} / 4,7 \cdot 10^{-6} = 2,1 \cdot 10^{15}$. Mechanický tlak světelného paprsku laseru je $2,1 \cdot 10^{15}$ krát větší než slunečního záření.

20. Na povrch kovu dopadá ve vakuu elektromagnetické záření o vlnové délce $\lambda_1 = 300$ nm. Z kovu uvolněné fotoelektrony mají energii 0,5 eV. Jaká je maximální vlnová délka λ_2 elektromagnetického záření, které ještě může vyvolat u tohoto kovu fotoefekt?

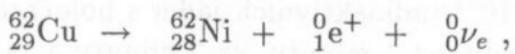
Řešení:

Foton o energii hf předá celou svou energii jedinému elektronu z povrchu kovu. Část této energie se spotřebuje na uvolnění elektronu z kovu (výstupní práce W_v) a zbytek zůstane elektronu jako jeho kinetická energie T . Podle Einsteinovy rovnice, vyjadřující zákon zachování energie, platí $hf = W_v + T$. Je-li energie fotonu menší než výstupní

novou konstantu λ .

Řešení:

Jádro $^{62}_{29}\text{Cu}$ se rozpadá podle schematu



kde ν_e je elektronové neutrino a e^+ je pozitron. Rozpadem ^{62}Cu vzniká jádro niklu ^{62}Ni , které je tvořeno 28 protony a 34 neutrony. V elektronovém obalu atomu niklu je 28 elektronů.

Přeměnová konstanta je rovna

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{9,76 \cdot 60} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

26. Poločas radioaktivní přeměny alfa nuklidu ^{238}U je $4,9 \cdot 10^9$ roků. Kolik přeměn se uskuteční v 1 g tohoto nuklidu za 1 s?

Řešení:

Veličina vyjadřující počet přeměn za jednu sekundu se nazývá aktivita A a je úměrná počtu N radioaktivních jader ve vzorku. Konstantou úměrnosti je přeměnová konstanta $\lambda = \ln 2 / T$, kde T je poločas rozpadu. Počet radioaktivních jader N určíme pomocí Avogadrovy konstanty N_A . Víme totiž, že látkové množství 1 mol uranu má hmotnost $A_r = 238$ g a obsahuje N_A atomů. Na jedno jádro uranu připadá hmotnost A_r / N_A . Ve vzorku o hmotnosti m je tedy $m / (A_r / N_A)$ atomů uranu. Počet přeměn v 1 g za 1 s je roven

$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{m}{A_r} \cdot N_A = \frac{0,693}{4,9 \cdot 10^9 \cdot 3,15 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{238} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,13 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1},$$
$$(1 \text{ rok} \approx 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}).$$

V 1 g uranu ^{238}U se uskuteční za 1 s $1,13 \cdot 10^4$ přeměn.

26a. Počet radioaktivních přeměn alfa v 1 g radia ^{226}Ra je $3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$. Určete poločas přeměny rádia.

Řešení:

Stejným postupem jako v předchozím příkladě dostaneme

$$T = \frac{\ln 2}{A} \cdot \frac{m}{A_r} \cdot N_A = \frac{0,693}{3,7 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{1}{226} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 4,99 \cdot 10^{10} \text{ s}.$$

Kinetickou energii fotoelektronů vypočítáme podle Einsteinovy rovnice pro fotoefekt

$$T = h f - W_v = \frac{h c}{\lambda} - W_v = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{200 \cdot 10^{-9} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} - 2,3 = 3,9 \text{ eV}.$$

Mezní vlnová délka světla, která způsobí emisi fotoelektronů ze sodíku je 540 nm. Kinetická energie fotoelektronů je rovna 3,9 eV.

23. Jádro uranu $^{238}_{92}\text{U}$ se postupně mění na jiná jádra (rozpadová řada). V této řadě je obsaženo 8 přeměn alfa a 6 přeměn beta. Co je konečným produktem této rozpadové řady?

Řešení:

Při rozpadu alfa se počet protonů v jádře zmenší o 2 a nukleonové číslo o 4, při rozpadu beta se počet protonů zvětší o 1 a počet nukleonů se nemění. Tedy $Z = 92 - 8 \times 2 + 6 = 82$, $A = 238 - 8 \times 4 = 206$. Konečným produktem rozpadové řady je tedy jádro olova $^{206}_{82}\text{Pb}$.

23a. Prvek RaA vzniká z $^{238}_{92}\text{U}$ postupným vyzářením pěti částic alfa a dvou částic beta. Který je to prvek?

Řešení:

Stejně jako v předchozím příkladě zjistíme, že jde o polonium $^{218}_{84}\text{Po}$.

24. Poločas přeměny T představuje dobu, za kterou se rozpadne polovina jader z původního množství N_0 . Znamená to, že za dobu $2T$ se rozpadne celé množství N_0 jader?

Řešení:

Nikoliv. Podle zákona radioaktivní přeměny klesá počet radioaktivních jader ve vzorku exponenciálně. To znamená, že za dobu T zůstává ve vzorku $N_0 / 2$ jader, za dobu $2T$ $N_0 / 4$ jader. Počet rozpadlých jader za dobu $2T$ je tedy $3N_0 / 4$.

25. Radionuklid $^{62}_{29}\text{Cu}$ vysílá záření β^+ s poločasem přeměny $T = 9,76$ min. Určete čisticové složení atomu dceřinného nuklidu vznikajícího touto přeměnou a určete přemě-

Jelikož exponent má hodnotu mnohem menší než 1, lze výraz $1 - e^{-x}$ nahradit x , tedy $\eta = 5,1 \cdot 10^{-7}$. Na dráze 1 m se rozpadne $5,1 \cdot 10^{-7} N_0$ neutronů.

29. Do krve člověka bylo vstříknuto nevelké množství roztoku, který obsahoval radioizotop ^{24}Na o aktivitě $A_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ Bq}$. Za 5 hodin po vstříknutí byla objemová aktivita krve $a_V = 265 \text{ kBq.m}^{-3}$. Určete v litrech objem krve člověka. Poločas přeměny ^{24}Na je 15 hodin.

Řešení:

Počáteční objemová aktivita radioizotopu ^{24}Na po vstříknutí do krve je $a_0 = A_0/V$, kde V je objem krve. Aktivita ubývá s časem exponenciálně:

$$a_V(t) = \frac{A_0}{V} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Odtud

$$V = \frac{A_0}{a_V} \cdot e^{-\lambda t} = \frac{2 \cdot 10^3}{265 \cdot 10^3} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{15} \cdot 5} = 6 \text{ l}.$$

Objem krve člověka byl 6 l.

30. Radioaktivní jádro ^{238}Pu , které bylo v klidu, se rozpadlo následujícím způsobem: $^{238}\text{Pu} \rightarrow ^{234}\text{U} + \alpha$. Při rozpadu se uvolnila energie $E_r = 5,49 \text{ MeV}$. Tuto energii získají ve formě kinetické energie produkty rozpadu. Jakou kinetickou energii získá částice alfa?

Řešení:

K výpočtu kinetické energie částice alfa užijeme zákonů zachování energie a hybnosti. Označme T_α , T_U kinetické energie částice alfa a jádra uranu, \vec{p}_α , \vec{p}_U odpovídající hybnosti. Protože jádro plutonia bylo původně v klidu, měla soustava nulovou hybnost a zákony zachování energie a hybnosti můžeme zapsat ve tvaru

$$E_r = T_\alpha + T_U, \quad \vec{0} = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_U.$$

Pro velikosti vektorů hybnosti platí $p_\alpha = p_U$. Protože rychlosti částice alfa a jádra uranu jsou nerelativistické, mnohem menší než c (jak se můžeme přesvědčit výpočtem rychlosti z kinetické energie - viz příklad 32), můžeme použít vztah mezi hybností a kinetickou energií ve tvaru $p = \sqrt{2mT}$. Pak dostáváme vztah $m_\alpha T_\alpha = m_U T_U$. Řešením soustavy dvou rovnic

$$T_\alpha + T_U = E_r, \quad m_\alpha T_\alpha - m_U T_U = 0$$

dostaneme kinetické energie T_α a T_U . Tedy

$$T_\alpha = \frac{E_r}{1 + \frac{m_\alpha}{m_U}} \approx \frac{E_r}{1 + \frac{A_\alpha}{A_U}} = \frac{5,49}{1 + \frac{4}{234}} = 5,40 \text{ MeV}$$

Přeypočítáme-li poločas přeměny radia na roky, dostaneme $T = 1580$ let.

27. Zářič alfa obsahuje 10^{12} radioaktivních jader s poločasem rozpadu 3 minuty. Kolik jader se rozpadá za 1 sekundu, za 1 minutu, za 3 minuty a za 6 minut?

Řešení:

Přeměna radioaktivních jader se řídí exponenciálním zákonem. Je-li v čase $t = 0$ v zářiči N_0 radioaktivních jader, pak v době $t > 0$ zůstává v zářiči $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ jader. Počet rozpadlých jader je tedy roven

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Dosadíme-li za přeměnovou konstantu $\lambda = \ln 2 / T$ a za t postupně 1 s, 1 min, 3 min, 6 min, dostáváme počet rozpadlých jader $3,84 \cdot 10^9$, $2,1 \cdot 10^{11}$, $5,0 \cdot 10^{11}$ a $0,75 \cdot 10^{12}$.

27a. Poločas přeměny radioaktivního izotopu, který emituje při rozpadu každého jádra jednu částici, je T . Na počátku obsahuje preparát N_0 jader. Kolik častic emitoval preparát za dobu $3T$?

Řešení:

Stejným postupem jako v předchozím příkladě dostáváme

$$\Delta N(3T) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} 3T} \right) = \frac{7}{8} N_0.$$

Preparát za dobu $3T$ emitoval $7/8 N_0$ častic.

28. Z jaderného reaktoru je vyveden svazek tepelných neutronů o kinetické energii $E_{kin} = 0,025$ eV. Vypočítejte, jaká část z celkového počtu N_0 neutronů se rozpadne na dráze 1 m. Poločas rozpadu neutronu je 10,37 min.

Řešení:

Počet rozpadlých neutronů ΔN za dobu t je dán vztahem $\Delta N(t) = N(t) - N_0 = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$, kde N_0 je počet neutronů v čase $t = 0$ a $N(t)$ počet neutronů v čase $t > 0$, které urazily dráhu $l = vt$. Rychlosť neutronů určíme z jejich kinetické energie jako $v = \sqrt{2E_{kin}/m}$. Relativní počet neutronů, které se rozpadnou na dráze l , je roven

$$\eta = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 (1 - e^{-\lambda t})}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} l \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}}}.$$

Exponent v předešlém výraze má hodnotu

$$\frac{\ln 2}{T} l \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}} = \frac{0,693}{10,37 \cdot 60} \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 0,025 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 5,1 \cdot 10^{-7}.$$

33. Určete $\frac{A}{Z}X$ v následujících jaderných reakcích:

- a) ${}_1^2H + \frac{A}{Z}X \rightarrow {}_2^4He + {}_2^4He$
- b) ${}_{14}^7N + \frac{A}{Z}X \rightarrow {}_{17}^8O + {}_1^1H$
- c) $\frac{A}{Z}X \rightarrow {}_{27}^{60}Co + \gamma$
- d) $\frac{A}{Z}X + {}_2^4He \rightarrow {}_{12}^6C + {}_0^1n$.

Řešení:

- a) ${}_3^6Li$, b) ${}_2^4He$, c) ${}_{27}^{60}Co^*$, d) ${}_4^9Be$
-

34. Při ostřelování jádra uhlíku ${}_{12}^6C$ deuterony ${}_1^2H$ probíhá jaderná reakce, při níž vzniká jádro radioaktivního dusíku a je emitován neutron. a) Zapište s použitím symbolů chemických prvků tuto jadernou reakci. b) Jádro dusíku se dále přeměňuje za vyslání pozitronu. Které jádro vzniká při této přeměně?

Řešení:

- a) ${}_{12}^6C + {}_1^2H \rightarrow {}_{13}^7N + {}_0^1n$
- b) ${}_{13}^7N \rightarrow {}_{13}^6C + {}_1^0e^+ + {}_0^0\nu_e$,

kde ${}_0^0\nu_e$ je elektronové neutrino. Při jaderné přeměně jádra dusíku ${}_{13}^7N$ vzniká jádro uhlíku ${}_{13}^6C$.

35. Určete energii v joulech, která se uvolní při rozštěpení 1 kg izotopu uranu 235U. Energie uvolněná v jednom aktu štěpení je 200 MeV. Jaké množství uhlí (spalné teplo $Q_S = 3 \cdot 10^7$ J/kg) je nutno spálit, abychom získali totéž množství tepla?

Řešení:

Energie uvolněná při rozštěpení m kg uranu 235U je rovna součinu počtu aktů štěpení N v m kg a energie E_r uvolněné při jednom štěpení. Tedy

$$Q = N E_r = \frac{m N_A}{A_r} E_r = \frac{1 \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}{235} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 8,17 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

K výpočtu N jsme využili Avogadrova zákona: látkové množství 1 kmol má hmotnost A_r kilogramů a obsahuje N_A atomů. Počet atomů N v jednom kilogramu uranu je roven $m/(A_r/N_A)$, kde N_A je Avogadrova konstanta.

K získání téhož tepla je nutno spálit

$$\frac{Q}{Q_S} = \frac{8,17 \cdot 10^{13}}{3 \cdot 10^7} = 2,7 \cdot 10^6 \text{ kg uhlí}.$$

(A_α , A_U jsou nukleonová čísla jader ${}^4\text{He}$ a ${}^{234}\text{U}$). Kinetická energie částice je 5,40 MeV.

31. Samovolným rozpadem jader se radioaktivní látka zahřívá. Vypočítejte, jaké množství tepla se vyvine za minutu v kalorimetru při radioaktivním rozpadu 1 g radia, který vyzáří $A = 3,7 \cdot 10^{10}$ částic alfa za sekundu. Částice alfa mají energii 4,7 MeV. Je-li měrná tepelná kapacita kalorimetru $C = 5 \text{ J/K}$, určete o kolik stupňů vzroste teplota kalorimetru.

Řešení:

Rozpad radia probíhá podle schematu ${}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}\text{Rn} + \alpha$. Množství tepla vyvinutého v kalorimetru rozpadem jader radia je rovno součinu energie rozpadu E_r , která se uvolní při rozpadu jednoho jádra radia a počtu rozpadů N , které proběhnou v 1 g radia za minutu: $E = N E_r$. Energii rozpadu určíme ze zákonů zachování energie a hybnosti stejným postupem jako v předchozím příkladě. Tak dostaneme

$$E_r = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Rn}} \right) T_\alpha \approx \left(1 + \frac{A_\alpha}{A_{Rn}} \right) T_\alpha .$$

Počet rozpadů N je roven součinu aktivity A a doby t , po kterou sledujeme vývin tepla v kalorimetru: $N = At$. Množství tepla, které se vyvine v kalorimetru za minutu při rozpadu jednoho gramu radia je tedy

$$E = \left(1 + \frac{A_\alpha}{A_{Rn}} \right) T_\alpha A t = \left(1 + \frac{4}{222} \right) 4,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,7 \cdot 10^{10} \cdot 60 = 1,7 \text{ J} .$$

Dělíme-li toto množství tepla měrnou tepelnou kapacitou kalorimetru, najdeme vzrůst teploty $\Delta t^\circ = E/C = 0,34 \text{ K}$.

32. Radium ${}^{226}\text{Ra}$ emituje při rozpadu částice alfa s kinetickou energií 4,7 MeV. Vypočítejte rychlosť částice alfa, je-li její relativní atomová hmotnost 4,001506.

Řešení:

Klidová energie částice alfa $A_r m_u c^2 = 4,001506 \cdot 931,5 = 3727,4 \text{ MeV}$ je mnohem větší než její kinetická energie ($m_u c^2$ je atomová hmotnostní konstanta vyjádřená v MeV - viz tabulku konstant). Proto můžeme použít nerelativistický vztah mezi rychlostí a kinetickou energií a určit rychlosť jako

$$v = \sqrt{\frac{2 T}{m}} = \sqrt{\frac{2 T}{A_r m_u}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4,001506 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27}}} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1} .$$

Rychlosť částice alfa emitované ${}^{226}\text{Ra}$ je $1,5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$, tj. jedna dvacetina rychlosti světla ve vakuu.

38. Jaký náboj Q má částice, která na dráze s rozdílem potenciálů 10 kV získala kinetickou energii 20 keV ?

Řešení:

Částice s nábojem Q , která projde potenciálním rozdílem U , získá kinetickou energii $E = QU$. Odtud

$$Q = \frac{E}{U} = \frac{20 \text{ keV}}{10 \text{ kV}} = 2 e.$$

Náboj částice vyjádřený v jednotkách elementárního náboje je $2 e$.

39. Vypočítejte rychlosť elektronu s kinetickou energií 0,1 MeV podle klasické a podle relativistické mechaniky.

Řešení:

Užitím klasického vztahu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}mv^2$ dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,88 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

V relativistickém případě určíme kinetickou energii jako rozdíl celkové energie částice a její klidové energie:

$$T = E - m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2;$$

klidová energie elektronu je rovna $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$. Pro rychlosť tedy najdeme

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{E}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{m c^2 + T}\right)^2} = \\ &= 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{0,511}{0,511 + 0,1}\right)^2} = 1,64 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

V tomto případě platí tedy nižší, relativistická rychlosť $1,64 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

40. Celková energie částice je přesně dvojnásobkem její klidové energie. Najděte její rychlosť.

Řešení:

Rychlosť částice určíme ze vztahu

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 m c^2$$

Energie uvolněná z 1 kg uranu ^{235}U je tedy stejná jako energie uvolněná spálením 2 700 tun uhlí.

36. Při jakém počtu aktů štěpení jader ^{235}U za 1 s je výkon roven 1 W ? Jak velký je výkon reaktoru, jestliže se v něm denně štěpí 1 g ^{235}U ? Předpokládejte, že při štěpení jednoho jádra uranu se uvolní energie 200 MeV.

Řešení:

Dělíme-li výkon P energií uvolněnou při štěpení jednoho jádra, dostaneme počet jader, která se rozštěpí za 1 s:

$$n = \frac{P}{E_r} = \frac{1}{200 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,1 \cdot 10^{10}.$$

Výkon reaktoru, ve kterém se denně štěpí m kg uranu je roven

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{m N_A}{A_r} \cdot E_r \cdot \frac{1}{t} = \frac{10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}{235} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{1}{3600 \cdot 24} \approx 1 \text{ MW},$$

kde mN_A/A_r je počet atomů uranu obsažených v m kg uranu, E_r je energie uvolněná při jednom štěpení a t je čas.

Výkonu 1 W je dosaženo, štěpí-li se $3,1 \cdot 10^{10}$ jader ^{235}U za sekundu. Reaktor, v němž se denně rozštěpí 1 g uranu má výkon 1 MW.

37. Svazek iontů ${}^6\text{Li}^+$ s jednotkovým nábojem a o energii 400 eV vstupuje do homogenního magnetického pole o indukci 0,08 T. Ionty se pohybují kolmo ke směru pole. Najděte poloměr jejich dráhy v magnetickém poli. Relativní atomová hmotnost ${}^6\text{Li}$ je 6,01513 m_u .

Řešení:

Magnetické pole působí na ionty Lorentzovou silou $F_m = q v B$, které zakřivuje dráhu iontu. Poloměr zakřivení R lze zjistit z podmínky rovnováhy působící magnetické síly a síly dostředivé:

$$\frac{m v^2}{R} = q v B.$$

Máme tedy

$$R = \frac{m v}{q B} = \frac{\sqrt{2 m T}}{q B} = \frac{\sqrt{2 \cdot 6,01513 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} \cdot 400 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,08} = 8,8 \text{ cm}.$$

Poloměr zakřivení dráhy iontů ${}^6\text{Li}^+$ v magnetickém poli je 8,8 cm.

jako

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{E}\right)^2} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Rychlosť častice je $2,6 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Literatura:

- [1] Kružík M.: Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol, SPN Praha 1969
- [2] Sbírka úloh z fyziky pro gymnázia I, II, SPN Praha 1989
- [3] Salach S., Plazak T., Sanok Z.: 500 testových úloh z fyziky pro studenty středních škol a uchazeče o studium na vysokých školách, přel. z polštiny, SPN Praha 1993
- [4] Lepil O. a kol.: Sbírka úloh pro střední školy, Prometheus Praha 1995