Hodnost matice

Připomeňme nejprve, že nadále dodržujeme úmluvu z minulého semestru, že pokud neřekneme jinak, jsou vektorové prostory konečné dimenze. Pokud užijeme pro prostor označení např. $\mathbf{P}_n$, je tím implicitně řečeno, že prostor má dimenzi n.

Definice:
Nechť $m, n \in \mathbf{N}$ a $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$,

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Označme $\mathcal{E}_n = (\vec{\mathbf{e}}^{(1)}, \vec{\mathbf{e}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{e}}^{(n)})$ standardní bázi v $\mathbf{C}^n$.
Hodností matice A nazveme číslo $h(\mathbf{A}) = \dim[\mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}^{(1)}, \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}^{(n)}]_\lambda$

tj. $h(\mathbf{A}) = \dim\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right]_\lambda = \dim[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda.$

Poznámky:
1) V definici jsme užili toho, že součin jakékoliv matice s i-tým vektorem standardní báze je roven i-tému sloupci matice, tj. $\mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$.
2) Méně korektně bychom tedy mohli říci, že h($\mathbf{A}$) je maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice.

Následující věta nám dává odpověď na to, jak souvisejí pojmy **hodnost matice** a **hodnost zobrazení**.

Věta 31:
Nechť $\mathbf{P}_n$ a $\mathbf{Q}_m$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_m)$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbf{P}_n$ a $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbf{Q}_m$.
Potom platí $h(\mathcal{A}) = h({}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}})$.

Důkaz:
Označme $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}), \mathcal{Y} = (\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)})$.
Víme, že
$h(\mathcal{A})$ =dim$\mathcal{A}(\mathbf{P}_n)$ =dim$\mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda)$ =dim$[\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$. Víme také, že zobrazení, které každému vektoru $\vec{\mathbf{v}} \in [\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ přiřadí m-tici jeho souřadnic v bázi $\mathcal{Y}$, tj. vektor
$(\vec{\mathbf{v}})_\mathcal{Y} \in [(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_\mathcal{Y}, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_\mathcal{Y}, \ldots, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})_\mathcal{Y}]_\lambda$, je izomorfizmus mezi prostory $[\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ a $[(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_\mathcal{Y}, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_\mathcal{Y}, \ldots, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})_\mathcal{Y}]_\lambda$, a proto mají oba prostory stejnou dimenzi (neboť jsou izomorfní).
Vektory $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)})_\mathcal{Y}$ pro $i \in \hat{n}$ jsou ovšem sloupce matice ${}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$, a proto platí následující rovnosti
$h(\mathcal{A})$ =dim$[\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda =$
=dim$[(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_\mathcal{Y}, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_\mathcal{Y}, \ldots, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})_\mathcal{Y}]_\lambda = h({}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}})$.

Poznámky:
1) **Jak se spočte hodnost matice A**= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$**?** K tomu si stačí uvědomit, že hodnost je dimenze prostoru generovaného souborem $\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2}JY2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$.
Stačí tedy z tohoto souboru generátorů vybrat bázi a zjistit, kolik má členů. K tomu stačí ekvivalentními úpravami řádků převést matici $\mathbf{A}$ do horního stupňovitého tvaru a zjistit počet hlavních sloupců.
2) Všimneme si, že z předchozí poznámky plyne, že ekvivalentními úpravami řádků se hodnost matice nemění.

Definice:

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbf{A}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Označme $\mathbf{A}^\top$ matici typu $n \times m$, $\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{A}^\top$ se nazývá **matice transponovaná k matici A**.

Bez důkazu uvedeme následující větu.

Věta 32:
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$. Pak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^\top)$.

Důsledek:
Maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků matice.

Vztah matic a lineárních zobrazení

Zatím víme, že je-li dán vektorový prostor $\mathbf{P}_n$ nad $\mathbf{C}$ s bází $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ a vektorový prostor $\mathbf{Q}_m$ nad $\mathbf{C}$ s bází $\mathcal{Y} = (\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)})$, je každému zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_m)$ přiřazena matice ${}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$, pro kterou platí $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$, tj. je-li dáno zobrazení, báze definičního oboru a báze oboru hodnot, je tomuto zobrazení jednoznačně přiřazena komplexní matice, která umožňuje snadno spočítat souřadnice obrazu vektoru $\vec{\mathbf{x}}$.
Snadno si rozmyslíme, že i naopak, je-li dána komplexní matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ a vektorové prostory (nad $\mathbf{C}$) dimenze n resp. m s bázemi $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$, existuje právě jedno zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_m)$, které ji má za svou matici zobrazení, tj. platí $\mathbf{A}={}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$. Je to zobrazení, které vektoru $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}_n$ přiřadí vektor $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}_m$, pro který $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$ (tj. souřadnice vektoru $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}$ se získají jako součin matice $\mathbf{A}$ s maticí $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$).
Tomuto zobrazení budeme říkat **zobrazení určené maticí A při bázích** $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

Ukážeme, že takto definované zobrazení je lineární:
(a) **aditivita**
Naše zobrazení přiřadí vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ vektor $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}$, pro který $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$,
vektoru $\vec{\mathbf{y}}$ vektor $\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}$, pro který $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}}$,
a vektoru $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ vektor $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})$, pro který $(\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}))_{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}}$.
Z toho plyne, že platí
$(\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}))_{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}} = \mathbf{A}((\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} + (\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}}) = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} + \mathbf{A}(\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}} =$
$= (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{Y}} + (\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{Y}} = (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{Y}}$,
a tedy platí také $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}$.
(b) **homogenita** se dokáže analogicky.
(c) **jednoznačnost** zobrazení plyne z toho, že obrazy vektorů $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ jsou dány jednoznačně (věta 19).
(d) **vztah** $\mathbf{A}={}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$ plyne z toho, že pro j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ platí
$\mathbf{A}_{\bullet j} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}^{(j)} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}}^{(j)})_{\mathcal{X}} = (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(j)})_{\mathcal{Y}}$.

Podobně, je-li dán vektorový prostor $\mathbf{P}_n$ nad $\mathbf{C}$ a báze $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$, existuje ke každé čtvercové matici řádu n operátor $\mathcal{A}$ tak, že ${}^{\mathcal{X}}\mathcal{A} = \mathbf{A}$. Tomuto operátoru budeme říkat **operátor určený maticí A** při bázi $\mathcal{X}$.

Poznámka:
Při prostorech nad tělesem $\mathbf{R}$ zavedeme stejné pojmy pro reálné matice.

Úvaha:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a $h(\mathbf{A}) = n$. Nechť $\mathcal{A}$ je operátor z $\mathcal{L}(\mathbf{P}_n)$ určený maticí $\mathbf{A}$ při bázi $\mathcal{X}$. Pak podle věty 31 je také $h(\mathcal{A}) = n$,
tj. $\dim \mathcal{A}(\mathbf{P}_n) = n \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{P}_n) = \mathbf{P}_n$.
$\mathcal{A}$ je tedy epimorfní $\overset{\text{(věta 23)}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{A}$ je **regulární** operátor.
Máme tedy důvod zavést definici

Definice:
Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n se nazývá **regulární**, platí-li $h(\mathbf{A}) = n$. V ostatních případech se nazývá **singulární**.

Poznámka:
Matice $\mathbf{A}$ je regulární $\iff$ zobrazení určené maticí $\mathbf{A}$ je regulární operátor, resp. izomorfizmus.

Úvaha:
Nechť $\mathbf{B}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbf{A}$ typu $p \times m$.
Jsou dány prostory $\mathbf{P}_n$ nad $\mathbf{C}$ s bází $\mathcal{X}$,
$\mathbf{Q}_m$ nad $\mathbf{C}$ s bází $\mathcal{Y}$,
$\mathbf{V}_p$ nad $\mathbf{C}$ s bází $\mathcal{Z}$.
Nechť $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_m)$ je zobrazení určené maticí $\mathbf{B}$ při bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$,
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{Q}_m, \mathbf{V}_p)$ je zobrazení určené maticí $\mathbf{A}$ při bázích $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}$.
Pak platí $\mathbf{B}={}^{\mathcal{X}}\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}$, $\mathbf{A}={}^{\mathcal{Y}}\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}$, a tedy $\mathbf{AB}={}^{\mathcal{Y}}\mathcal{A}^{\mathcal{Z}}\,{}^{\mathcal{X}}\mathcal{B}^{\mathcal{Y}} \overset{(\text{věta } 30)}{=} {}^{\mathcal{X}}(\mathcal{AB})^{\mathcal{Z}}$.
$\mathbf{AB}$ je tedy matice složeného zobrazení $\mathcal{AB}$ v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$. Podle věty 27 víme, že $h(\mathcal{AB}) \leq \min(h(\mathcal{A}), h(\mathcal{B}))$, a že když je $\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ izomorfní nastávají rovnosti.
Důsledkem těchto úvah je věta

Věta 33:
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $p \times m$ a $\mathbf{B}$ matice typu $m \times n$. Potom
1) $h(\mathbf{AB}) \leq \min\{h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})\}$,
2) je-li $p = m$ a $\mathbf{A}$ regulární matice, je $h(\mathbf{AB}) = h(\mathbf{B})$,
3) je-li $m = n$ a $\mathbf{B}$ regulární matice, je $h(\mathbf{AB}) = h(\mathbf{A})$.

Úvaha:
Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu n, $\mathbf{P}_n$ vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ s bází $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ a $\mathcal{A}$ je operátor určený maticí $\mathbf{A}$ při bázi $\mathcal{X}$ (tj. ${}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}=\mathbf{A}$).
Z předchozího víme, že $\mathcal{A}$ je regulární operátor, proto k němu existuje inverzní operátor $\mathcal{A}^{-1}$ a platí $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}$ pro každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}_n$.
Označme $\mathbf{A}^{-1}$ matici operátoru $\mathcal{A}^{-1}$ v bázi $\mathcal{X}$.
Dokážeme, že platí $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$.
Pro každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}_n$ platí
$(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = (\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}))_{\mathcal{X}} \overset{(\text{věta } 28)}{=} {}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{-1})(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} \overset{(\text{věta } 28)}{=} {}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{-1})\,{}^{\mathcal{X}}\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$. Užijeme-li vztahu $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$ pro volbu $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, kde $i \in \hat{n}$, dostaneme $\vec{\mathbf{e}}^{(i)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}^{(i)}$, což znamená, že i-tý sloupec matice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ je roven $\vec{\mathbf{e}}^{(i)}$, a tedy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$.
Platí ovšem silnější tvrzení.

Věta 34:
Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu n. Pak existuje právě jedna čtvercová matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n tak, že platí

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \qquad (\star)$$

Tato matice se nazývá **matice inverzní** k matici $\mathbf{A}$.

Důkaz:
Existence matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n s vlastností $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$ již byla dokázána.
Podle věty 33 je $h(\mathbf{A}^{-1}) = h(\mathbf{I}) = n$ a tedy $\mathbf{A}^{-1}$ je regulární. Podle předcházející úvahy i k ní existuje matice $\mathbf{B}$ tak, že $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$.
Platí $\mathbf{B}=\mathbf{BI}=\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$. Platí tedy také $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$.
Jednoznačnost inverzní matice dokážeme sporem.
Nechť např. existuje matice $\mathbf{C}\neq\mathbf{A}^{-1}$ tak, že $\mathbf{CA}=\mathbf{I}$. Potom platí
$\mathbf{C}=\mathbf{CI}=\mathbf{CA}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}$. A to je spor.

Poznámka:
Je zřejmé, že mluvit o inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ splňující vztahy $(\star)$ má smysl pouze pro regulární

matice $\mathbf{A}$. Jinak taková matice nemůže existovat.
Připusťme na chvíli, že matice $\mathbf{A}$ by byla typu $m \times n$. Aby měly smysl součiny $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ je nutné, aby platilo, že $\mathbf{A}^{-1}$ je typu $n \times m$ a z rovnosti
$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$=$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ plyne $m = n$. Matice $\mathbf{A}$ je tedy nutně čtvercová.
Z ($\star$) a z věty 33 plyne $n = h(\mathbf{I}) \leq \min\{h(\mathbf{A}), h(\mathbf{A}^{-1})\}$, a tedy
$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^{-1}) = n$, takže obě matice jsou regulární.

Věta 35:
Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou regulární matice řádu n. Pak také matice $\mathbf{AB}$ je regulární a platí $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Důkaz:
Neboť $h(\mathbf{AB}) \overset{\text{(věta 33)}}{=} h(\mathbf{A}) = n$ je matice $\mathbf{AB}$ regulární. Z asociativního zákona plyne $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$=$\mathbf{I}$ a $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})$=$\mathbf{I}$.

Poznámka:
Zřejmě platí $\mathbf{I}^{-1}$=$\mathbf{I}$ a pro každé číslo $\alpha \neq 0$ platí $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$.

Věta 36:
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times m$ a $\mathbf{B}$ matice typu $m \times p$. Pak $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

Důkaz:
Označme $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$,
a tedy $\mathbf{A}^\top=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^\top=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \dots \\ b_{1p} & b_{2p} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}$.
Ukážeme, že matice $(\mathbf{AB})^\top$ a matice $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ mají na místě (i, j), $i \in \hat{p}$, $j \in \hat{n}$ stejné prvky.
$[(\mathbf{AB})^\top]_{ij} = [\mathbf{AB}]_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \ldots + a_{jm}b_{mi}$.
$[\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top]_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \ldots + b_{mi}a_{jm}$.

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

V tomto odstavci se zabýváme otázkou, kdy má soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (\star)$$

řešení a jak vypadá množina všech řešení.
Přitom předpokládáme, že jsou dostatečně známy pojmy **matice soustavy**, **rozšířená matice soustavy**, **řešení soustavy**, **sloupec pravých stran**, **homogenní soustava** a dále fakt, že označíme-li

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a } \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

můžeme pro soustavu $(\star)$ použít úsporného zápisu $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Vyčerpávající odpověď na zmíněné problémy dává následující věta

Věta 37:(Frobeniova)
(1) Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ je řešitelná, právě když $h(\mathbf{A}) = h((\mathbf{A}, \vec{\mathbf{b}}))$.
(2) Označme $h(\mathbf{A}) = h$. Označme $\mathbf{S}_0$ množinu všech řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$. Pak $\mathbf{S}_0 \subset\subset \mathbf{C}^n$ a $\dim \mathbf{S}_0 = n - h$, tj.
(a) pro $h = n$ je $\mathbf{S}_0 = \{\vec{\mathbf{o}}\}$,
(b) pro $h < n$ existuje $n - h$ lineárně nezávislých řešení $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n-h)}$ a $\mathbf{S}_0 = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n-h)}]_\lambda$.
(3) Je-li $h(\mathbf{A}) = h((\mathbf{A}, \vec{\mathbf{b}})) = h$ a označíme-li $\mathbf{S}$ množinu všech řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, je $\mathbf{S}=\tilde{\vec{\mathbf{x}}} + \mathbf{S}_0$, kde jsme $\tilde{\vec{\mathbf{x}}}$ označili nějaké pevné (tzv. partikulární) řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Důkaz:
(1) Protože $[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda \subset\subset [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \vec{\mathbf{b}}]_\lambda$
vyplývá z věty 12, že
$[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \vec{\mathbf{b}}]_\lambda = [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda \Longleftrightarrow h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{b}})$.
Stačí tedy dokázat ekvivalenci:
soustava $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ je řešitelná $\Longleftrightarrow [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \vec{\mathbf{b}}]_\lambda = [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$.
To je ovšem snadné.

Existuje-li totiž řešení $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ soustavy $(\star)$, pak

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

tj. $\vec{\mathbf{b}} = x_1\mathbf{A}_{\bullet 1} + x_2\mathbf{A}_{\bullet 2} + \dots + x_n\mathbf{A}_{\bullet n}$, tj. $\vec{\mathbf{b}} \in [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$, a tedy podle věty 2 je $[\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}, \vec{\mathbf{b}}]_\lambda = [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$.
Naopak, platí-li poslední rovnost, je $\vec{\mathbf{b}} \in [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$, tj. existují čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak, že $\vec{\mathbf{b}} = x_1\mathbf{A}_{\bullet 1} + x_2\mathbf{A}_{\bullet 2} + \dots + x_n\mathbf{A}_{\bullet n}$, a tedy vektor $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ řeší soustavu $(\star)$.

(2) Označme $\mathcal{A}$ zobrazení z $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^m)$ určené maticí $\mathbf{A}$ při standardních bázích, tj. takové, že $\mathbf{A}={}^{\mathcal{E}_n}\mathcal{A}^{\mathcal{E}_m}$. Podle věty 31 je $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathcal{A})$.
Platí $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}} \Longleftrightarrow (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{E}_m} = {}^{\mathcal{E}_n}\mathcal{A}^{\mathcal{E}_m}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{E}_n} = \vec{\mathbf{o}} \Longleftrightarrow \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$.
Řešením rovnice $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$ jsou tedy právě všechny vektory z jádra zobrazení $\mathcal{A}$, a proto

$\dim \mathbf{S}_0 = d(\mathcal{A})$. Podle druhé věty o dimenzi je tedy $\dim \mathbf{S}_0 = n - h$.

(3) Podle dokázané první části věty existuje nějaké řešení $\vec{\tilde{\mathbf{x}}}$ splňující rovnici $\mathbf{A}\vec{\tilde{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{b}}$, tj. $\mathcal{A}\vec{\tilde{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{b}}$ a $\mathbf{S}$ (tj. množina všech řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$) je množina všech řešení rovnice $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ (zdůvodnění je stejné jako v odstavci (2)). Podle věty 21 je $\mathbf{S}=\vec{\tilde{\mathbf{x}}} + ker\mathcal{A} = \vec{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{S}_0$.

Důsledek 1:
Homogenní soustava $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$ má vždy řešení, neboť $h(\mathbf{A}) = h((\mathbf{A}, \vec{\mathbf{o}}))$.
(O tom se ale můžeme snadno přesvědčit dosazením $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$.)
Důsledek 2:
Soustava $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ se čtvercovou maticí $\mathbf{A}$ řádu n má právě jedno řešení, právě když $\mathbf{A}$ je regulární. Řešením je vektor $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}$.
Důkaz:
a) Nechť $\mathbf{A}$ je regulární $\Rightarrow h(\mathbf{A}) = n \Rightarrow h(\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}) = n$ (neboť větší být nemůže) $\overset{(\text{věta } 37)}{\Longrightarrow}$ existuje řešení a $\mathbf{S}_0 = \{\vec{\mathbf{o}}\} \Rightarrow$ řešení je právě jedno.
b) Nechť existuje právě jeden vektor $\vec{\mathbf{x}}^{(0)}$ tak, že $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(0)} = \vec{\mathbf{b}}$. Podle věty 37 je množina řešení $\mathbf{S}=\vec{\mathbf{x}}^{(0)} + \mathbf{S}_0$, a tedy $\mathbf{S}_0 = \{\vec{\mathbf{o}}\}$, tj. $\dim \mathbf{S}_0=0$. Protože
$\dim \mathbf{S}_0 = n - h(\mathbf{A})$, je $h(\mathbf{A}) = n$, tj. $\mathbf{A}$ je regulární.
Dosazením se můžeme přesvědčit, že řešením je vektor $\mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}$.

Technika řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$
(Gaussova eliminační metoda.)

Označme n počet neznámých. Řešení soustavy nalezneme následujícím postupem:

1) Rozšířenou matici soustavy převedeme ekvivalentními úpravami řádků do horního stupňovitého tvaru.

2) Zjistíme hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy. Když se liší (tj. sloupec pravých stran je hlavní), není soustava řešitelná.

3) V případě, že $h(\mathbf{A}) = h((\mathbf{A}, \vec{\mathbf{b}}))$ nalezneme $n-h$ lineárně nezávislých řešení $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n-h)}$ homogenní soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$.
To uděláme tak, že za $n-h$ neznámých odpovídajících vedlejším sloupcům dosadíme $(n-h)$-tice čísel tak, abychom si po dopočtení zbývajících neznámých vynutili lineární nezávislost výsledných vektorů. Doporučené volby jsou např.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že pokud takto zvolíme složky řešení odpovídající vedlejším sloupcům a zbývající složky dopočteme, budou výsledná řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$ lineárně nezávislá.

4) Najdeme partikulární řešení $\vec{\tilde{\mathbf{x}}}$ soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$. K tomu stačí zvolit složky odpovídající vedlejším sloupcům libovolně (připadá v úvahu

i volba $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) a zbývající složky řešení dopočteme. Podle věty 37 je množina řešení $\mathbf{S}=\vec{\tilde{\mathbf{x}}}+[\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n-h)}]_\lambda$.
Každý vektor tvaru

$$\vec{\mathbf{x}}=\vec{\tilde{\mathbf{x}}}+t_1\vec{\mathbf{x}}^{(1)}+t_2\vec{\mathbf{x}}^{(2)}+\ldots+t_{n-h}\vec{\mathbf{x}}^{(n-h)}, \qquad (\star)$$

kde $t_i \in \mathbf{C}$ pro $i \in \widehat{n-h}$, je řešením soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}$ a naopak, je-li $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}$, existují komplexní parametry $t_1, t_2, \ldots, t_{n-h}$ tak, že platí $(\star)$.
Proto je zvykem říkat výrazu $(\star)$ **obecné řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}$.**
Pokud jde o soustavu s reálnými koeficienty a zajímají nás jen reálná řešení, provádíme samozřejmě vše „reálně“, tj. i parametry $t_1, t_2, \ldots, t_{n-h}$ volíme reálné.

Poznámka:
Je-li počet neznámých roven hodnosti matice (což nastane např. když matice **A** je regulární), jsou po převodu na horní stupňovitý tvar všechny sloupce hlavní, odpadá krok 3) a $\mathbf{S}_0=\{\vec{\mathbf{o}}\}$.

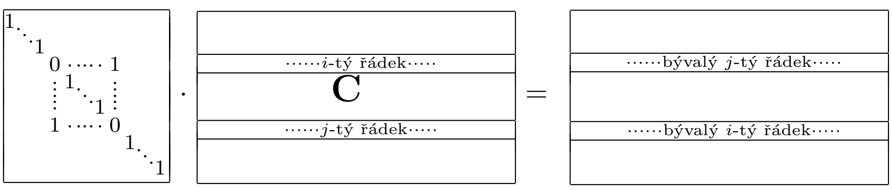
Výpočet součinu $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Pomocná věta:
Nechť **C** je matice typu $n \times p$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \ldots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{np} \end{pmatrix}$. Provedeme-li ekvivalentní úpravu řádků matice **C**, je výsledná matice rovna matici **TC**, kde **T** je čtvercová matice řádu n, která z jednotkové matice **I** řádu n vznikla stejnou ekvivalentní úpravou.

Důkaz:
Platnost je třeba dokázat pro všechny tři typy ekvivalentní úpravy.
(a) Prohodíme-li i-tý a j-tý řádek matice **I**, dostaneme matici **T** tvaru

$$\mathbf{T}=\begin{array}{l}\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 \cdots & 1 \cdots & & \\ & & & \vdots\ 1 & \ddots\ 1\ \vdots & & \\ & & & 1 \cdots & 0 \cdots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \ 1 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdots\cdots i\text{-tý řádek} \\ \\ \cdots\cdots j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

Uvědomíme-li si, jak se násobí matice, je výsledek součinu **TC** zřejmý z následujícího obrázku (i-tý a j-tý řádek matice **C** se prohodí)

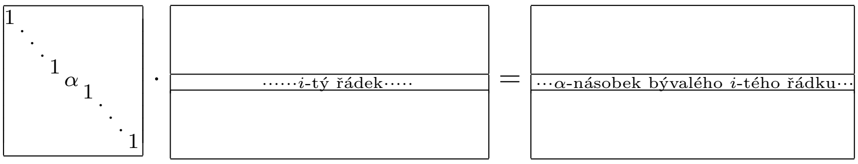


Sledujeme-li totiž, jak se mění při násobení maticí **T** jednotlivé řádky matice **C**, zjistíme, že se změnily jen řádky obsazené textem.

(b) Násobíme-li i-tý řádek matice **I** číslem α, dostaneme matici **T** tvaru

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\alpha&&\\&&&&1&\\&&&&&\ddots\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \cdots\cdots i\text{-tý řádek}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Výsledek součinu **TC** je opět patrný z obrázku

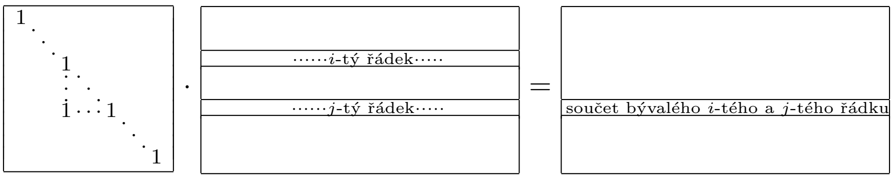


Opět se mění pouze řádek obsazený textem.

(c) Připočteme-li i-tý řádek matice **I** k jejímu j-tému řádku, dostaneme matici **T** tvaru

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&\vdots&\ddots&\\&&1&\cdots&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \cdots\cdots i\text{-tý řádek}\\ \\ \cdots\cdots j\text{-tý řádek}\\ \\ \\ \end{array}$$

Výsledek součinu **TC** je patrný z obrázku



Mění se tedy pouze výsledný j-tý řádek.

Z této pomocné věty snadno získáme obecnější tvrzení.

Věta 38:
Nechť **C** je matice typu $n \times p$. Provedeme-li konečný počet ekvivalentních úprav řádků matice **C**, je výsledná matice rovna matici **TC**, kde **T** je matice, která z jednotkové matice **I** řádu n vznikla stejnými řádkovými úpravami (ve stejném pořadí).

Důkaz:
Z předcházející pomocné věty je zřejmé, že po k ekvivalentních úpravách je výsledná matice rovna součinu $\mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1}\cdots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{C}$, kde matice $\mathbf{T}_i$ $(i \in \hat{n})$ jsou matice, které z **I** vznikly jednotlivými ekvivalentními úpravami. Označíme-li $\mathbf{T}=\mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1}\cdots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ je $\mathbf{T}=\mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1}\cdots\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{I}$, což podle dokázané pomocné věty znamená, že matice **T** vznikla z **I** odpovídajícími ekvivalentními úpravami. Tím je věta dokázána.

Užití věty 38:
Nechť **A** je regulární matice řádu n a **B** matice typu $n \times m$. Sestavme novou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$

o n řádcích a m sloupcích. Provádějme ekvivalentní úpravy řádků nové matice $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ tak dlouho, až na místě původní matice $\mathbf{A}$ vznikne jednotková matice $\mathbf{I}$. Původní matice $\mathbf{B}$ se těmito úpravami samozřejmě také změní na matici, kterou označíme $\mathbf{X}$ (ale zatím o ní nic nevíme). Platí

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim (\mathbf{I}|\mathbf{X})$$

Podle dokázané pomocné věty existuje regulární matice $\mathbf{T}$ taková, že $\mathbf{I}=\mathbf{TA}$, a protože $\mathbf{X}$ vznikla z $\mathbf{B}$ stejnými ekvivalentními úpravami je $\mathbf{X}=\mathbf{TB}$. Z toho plyne $\mathbf{T}=\mathbf{A}^{-1}$, a tedy $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Příklady použití:
Je-li $\mathbf{A}$ regulární matice řádu n, $\mathbf{B}$ matice typu $n \times m$, $\mathbf{I}$ jednotková matice řádu n a $\vec{\mathbf{b}}$ vektor z $\mathbf{C}^n$, platí následující ekvivalence mezi maticemi:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \qquad (\mathbf{A}|\vec{\mathbf{b}}) \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}) \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{I}) \sim (\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}).$$

První ekvivalence užijeme k výpočtu součinu $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, tj. řádky matice $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ upravujeme tak dlouho, až na místě původní matice $\mathbf{A}$ vznikne jednotková matice $\mathbf{I}$. Na místě matice $\mathbf{B}$ vznikne hledaný součin.
Druhá ekvivalence se analogicky použije k řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{\mathbf{b}}$, neboť řešení je vektor $\mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}$.
Třetí ekvivalence slouží k výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$.
Pokud matice $\mathbf{C}$ je typu $p \times n$ a chtěli bychom počítat součin $\mathbf{CA}^{-1}$, stačí použít vztahu

$$(\mathbf{A}^\top|\mathbf{C}^\top) \sim (\mathbf{I}|(\mathbf{A}^\top)^{-1}\mathbf{C}^\top) = (\mathbf{I}|(\mathbf{CA}^{-1})^\top).$$

Tomuto postupu pro výpočet součinů tvaru $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ budeme říkat **úplné eliminační schema**.

Poznámka:
V souvislosti s úplným eliminačním schematem vzniká otázka, zda lze každou regulární matici $\mathbf{A}$ řádu n převést ekvivalentními úpravami řádků na matici $\mathbf{I}$. To vždy lze.
Víme, že matici $\mathbf{A}$ jako každou jinou lze převést do horního stupňovitého tvaru. Protože je navíc regulární, jsou všechny sloupce hlavní, a tedy diagonální prvky nenulové. Budeme tedy pokračovat dále tak, že všechny řádky vydělíme diagonálními prvky, abychom na diagonále dostali jedničky. K matici $\mathbf{I}$ se dostaneme v n krocích.
V prvním odečteme od prvních $n-1$ řádků takové násobky n-tého řádku, aby v nich byly v posledním sloupci nuly.
V druhém kroku odečteme od prvních $n-2$ řádků takové násobky
$(n-1)$-ního řádku, aby v nich byly v předposledním sloupci nuly. Upravený poslední sloupec se tím nepoškodí.
V třetím kroku odečteme od prvních $n-3$ řádků takové násobky $(n-2)$-hého řádku, aby v nich byly v $(n-2)$-hém sloupci nuly. Poslední dva sloupce se opět nemění.
Je zřejmé, že po n takových krocích dostaneme matici jednotkovou.

Determinanty

Pojem **determinant matice** je spojen výhradně se čtvercovými maticemi. Pomocným pojmem je pojem **permutace** množiny $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$, který je dán následující definicí.

Definice:
Nechť $n \in \mathbf{N}$. Každé prosté zobrazení $\hat{n}$ na sebe budeme nazývat **permutace množiny** $\hat{n}$. Množinu všech permutací množiny $\hat{n}$ označíme $\mathbf{S}_n$.

Pro označení permutací budeme užívat malá řecká písmena. Když $\pi \in \mathbf{S}_n$ nazveme čísla $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ **hodnoty permutace** a permutaci popíšeme buď vztahem $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ nebo zapíšeme stejnou permutaci vztahem $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$.
První způsob zápisu je tabulka, ve které jsou v prvním řádku prvky množiny $\hat{n}$ a v druhém jejich obrazy v permutaci π. Předností tohoto zápisu je, že není vždy nutné, aby čísla v prvním řádku byla vždy srovnána vzestupně. Podstatné je, aby pod číslem byl jeho obraz. Při druhém způsobu zápisu je ovšem třeba dbát na pořadí.
Permutace $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ se nazývá **identická permutace**. Protože permutace π je prosté zobrazení, existuje vždy **inverzní permutace** π^{-1} taková, že $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \epsilon$.
Je to permutace $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Definice:
Nechť $n \in \mathbf{N}$, $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$. Permutaci $\tau_{ij} \in \mathbf{S}_n$, kde
$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$ pro $i < j$,
nazýváme **transpozicí** čísel i, j.

τ_{ij} je tedy permutace, která přehodí čísla i a j a tedy $\tau_{ij}\tau_{ij} = \epsilon$, tj. $\tau_{ij} = {\tau_{ij}}^{-1}$.
Zřejmě platí $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Definice:
Nechť $\pi \in \mathbf{S}_n$. Každou dvojici $(i, j), i \in \hat{n}, j \in \hat{n}$, pro kterou $i < j$
a $\pi(i) > \pi(j)$ nazveme **inverzí** v permutaci π. Číslo $(-1)^{I_\pi}$, kde I_π je počet všech inverzí v π nazveme znaménko (signum) permutace π. Značíme ho
sgn π. Je-li sgn π=+1, říkáme, že π je **sudá** permutace, jinak je **lichá**.

Každou permutaci lze složit z transpozic, tj. platí věta:

Věta 39: Nechť $\pi \in \mathbf{S}_n, \pi \neq \epsilon$. Potom existují transpozice $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l \in \mathbf{S}_n$, takové, že $\pi = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_l$. Přitom platí sgn $\pi = (-1)^l$.

Větu uvádíme bez důkazu.

Důsledek 1:
Nechť $\pi_1, \pi_2 \in \mathbf{S}_n$. Potom $\operatorname{sgn}\pi_1\pi_2 = \operatorname{sgn}\pi_1 \cdot \operatorname{sgn}\pi_2$.

Důkaz:
Nechť $\pi_1 = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$ a $\pi_2 = {\tau_1}'{\tau_2}' \cdots {\tau_l}' \Longrightarrow$
$\operatorname{sgn}(\pi_1\pi_2) = \operatorname{sgn}(\tau_1\tau_2 \cdots \tau_k{\tau_1}'{\tau_2}' \cdots {\tau_l}') = (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \operatorname{sgn}\pi_1 \operatorname{sgn}\pi_2$.

Důsledek 2:
Transpozice je lichá permutace.

Důkaz: Zřejmý.

Důsledek 3:
Nechť $\pi \in \mathbf{S}_n$. Pak $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$.

Důkaz: $1 = \operatorname{sgn} \epsilon = \operatorname{sgn} \pi\pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \pi^{-1}$.

Závěrem připomeneme, že ze střední školy je známo, že počet permutací množiny $\hat{n}$ je $n!$

Definice a základní vlastnosti determinantů

Definice:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazveme číslo

$$\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}\,(k_1,\dots,k_n) a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

Poznámky:

1) Determinant je tedy suma všech součinů n-tic prvků matice $\mathbf{A}$, při kterých se zachovává pravidlo, že v součinu je z každého řádku a z každého sloupce **právě jeden** prvek a součin je znásoben znaménkem odpovídající permutace. Je to permutace, která řádkovému indexu každého prvku v součinu přiřazuje jeho sloupcový index. To znamená, že platí také

$\det \mathbf{A}= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in \mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}\,(k_1,\dots,k_n) a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$.

2) Sčítance tvaru $\operatorname{sgn}\,(k_1,\dots,k_n) a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ se nazývají **členy determinantu**.

3) Je zřejmé, že determinant má $n!$ členů.

Determinanty speciálních typů matic

1) Nechť $\mathbf{A}=(a_{11})$, pak zřejmě $\det \mathbf{A}=\operatorname{sgn}\binom{1}{1}a_{11} = a_{11}$.

2) Nechť $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. V úvahu přicházejí pouze 2 permutace, $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ se znaménkem $\operatorname{sgn}\,\pi_1 = 1$ a $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ se znaménkem $\operatorname{sgn}\,\pi_2 = -1$. Je tedy $\det \mathbf{A}=a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3) Nechť $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. V úvahu přichází 6 permutací.

Permutace $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se znaménkem 1

a permutace $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ se znaménkem -1.

Je tedy

$\det \mathbf{A}=a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Poznámka:

Někdy se pro zapamatování vzorce pro výpočet determinantů matic 2. a 3. řádu užívá mnemotechnických pomůcek. Pro matice 2. řádu

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Tím je naznačeno, že se násobí jen prvky matice spojené šipkami, přičemž má-li šipka směr $\searrow$, opatří se součin znaménkem $+$, má-li směr $\nearrow$, znaménko je -.

Podobně pro výpočet determinantu matice 3. řádu se doporučuje pod matici opsat znovu 1. a 2. řádek a pospojovat prvky následujícím způsobem

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

Opět se násobí pouze prvky spojené čarami a o znaménku rozhoduje směr šipky. Tento způsob výpočtu je znám pod názvem Sarusovo pravidlo. Je ovšem třeba zdůraznit, že pro determinanty matic vyššího řádu obdobné pravidlo **neplatí**.

4) **Definice:**

Matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se nazývá **dolní** resp. **horní** trojúhelníková, platí-li $a_{ij} = 0$ pro $i < j$ resp. pro $i > j$, kde $i, j \in \hat{n}$.

Platí tvrzení: Je-li **A** horní (resp. dolní) trojúhelníková matice, je det $\mathbf{A}$=$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Důkaz:

Nechť např. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Členy determinantu, které neobsahují prvek a_{11}, jsou určitě rovny nule, neboť musí obsahovat jiný prvek prvního sloupce.

Budeme se proto dále zabývat jen členy determinantu, které prvek a_{11} obsahují. Jediný takový člen determinantu, který není nutně nulový, je roven součinu $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Kdyby totiž a_{ii} byl první diagonální prvek, který ve zkoumaném členu determinantu chybí, musel by v tomto členu být místo něho jiný prvek z i-tého sloupce. Jeho řádkový index by ovšem musel být větší než i, protože náš člen obsahuje prvky $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{i-1,i-1}$. Takový prvek je ovšem nutně nulový, a tedy i člen determinantu je nulový.

Tím je tvrzení dokázáno.

Důsledky:

a) Determinant diagonální matice je roven součinu diagonálních prvků.

b) det $\mathbf{I}$=1.

Věta 40:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak det $\mathbf{A}$=det $\mathbf{A}^\top$.

Důkaz:

det $\mathbf{A}$ je suma sčítanců tvaru sgn$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$.

V det $\mathbf{A}^\top$ vystoupí každý součin $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ také (protože splňuje pravidlo, že z každého řádku a z každého sloupce je tam právě jeden prvek). Protože však každý prvek a_{ij} je v $\mathbf{A}^\top$ na místě s indexy (j,i), bude opatřen znaménkem sgn$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Permutace, které zde vystupují, jsou ovšem vzájemně inverzní, a tedy znaménka jsou stejná.

Věta 41:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Potom:

(a) Vznikne-li matice $\mathbf{B}$ násobením některého sloupce (řádku) matice $\mathbf{A}$ číslem c, je det $\mathbf{B}=$ $c$det $\mathbf{A}$.

(b) Je-li některý sloupec (řádek) matice $\mathbf{A}$ nulový, je det $\mathbf{A}=0$.

(c) Má-li $\mathbf{A}$ dva sloupce (řádky) stejné, je det $\mathbf{A}$=0.

(d) Označíme-li $\mathbf{A}=\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i-1)}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{a}}^{(i+1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right)$

a $\mathbf{B}=\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i-1)}, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{a}}^{(i+1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right)$,

pak det $\mathbf{A}+$ det $\mathbf{B}=$ det $\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i-1)}, \vec{\mathbf{p}}+\vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{a}}^{(i+1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right)$.

Analogické tvrzení platí i pro řádky.

(e) Připočteme-li k jednomu sloupci (řádku) matice $\mathbf{A}$ lineární kombinaci jiných sloupců (řádků) této matice, determinant matice se nezmění.

(f) Vznikne-li matice $\mathbf{B}$ z matice $\mathbf{A}$ přehozením dvou sloupců (řádků),
je det $\mathbf{B}$ = -det $\mathbf{A}$.

Důkaz:

Vzhledem k větě 40 je lhostejné, zda důkazy provádíme pro řádky nebo pro sloupce.

(a) V každém členu determinantu je právě jeden prvek příslušného sloupce. Když byl sloupec násoben číslem c, je každý člen determinantu znásoben číslem c, a tedy lze toto číslo vytknout.
(b) To, že je sloupec roven $\vec{\mathbf{o}}$, lze chápat tak, že nějaký původní sloupec byl násoben nulou, a podle (a) je tedy det $\mathbf{A}$ =0.
(c) Předpokládejme, že i-tý a j-tý řádek jsou stejné. Determinant obsahuje s každým členem

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(j) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{j\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)}$$

také člen

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(j) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{i\pi(j)}\cdots a_{j\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}.$$

Protože z našeho předpokladu vyplývá, že $a_{i\pi(i)} = a_{j\pi(i)}$ a $a_{j\pi(j)} = a_{i\pi(j)}$, liší se oba členy nejvýše znaménkem příslušné permutace. Protože ale druhá permutace vznikne z první složením s jedinou transpozicí τ_{ij}, jsou znaménka permutací opačná a členy se zruší. Determinant se tedy rovná nule.
(d) Označíme-li $\mathbf{a}_j^{(i)}$ j-tou složku vektoru $\vec{\mathbf{a}}^{(i)}$ (tj. prvek na j-tém místě v i-tém sloupci matice) a analogicky pro vektory $\vec{\mathbf{p}}$ a $\vec{\mathbf{q}}$, platí

$$\det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i-1)}, \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{q}}, \vec{\mathbf{a}}^{(i+1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) =$$
$$= \sum_{\pi\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}\pi\ \mathbf{a}^{(1)}_{\pi(1)}\mathbf{a}^{(2)}_{\pi(2)}\cdots\mathbf{a}^{(i-1)}_{\pi(i-1)}(\mathbf{p}_{\pi(i)} + \mathbf{q}_{\pi(i)})\mathbf{a}^{(i+1)}_{\pi(i+1)}\cdots\mathbf{a}^{(n)}_{\pi(n)} =$$
$$= \sum_{\pi\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}\pi\ \mathbf{a}^{(1)}_{\pi(1)}\cdots\mathbf{p}_{\pi(i)}\cdots\mathbf{a}^{(n)}_{\pi(n)} + \sum_{\pi\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}\pi\ \mathbf{a}^{(1)}_{\pi(1)}\cdots\mathbf{q}_{\pi(i)}\cdots\mathbf{a}^{(n)}_{\pi(n)} =$$
$$= \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{p}}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) + \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{q}}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right).$$

(e) Determinant má tvar $\det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i-1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(i)} + \sum_{j\neq i}\gamma_j\vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \vec{\mathbf{a}}^{(i+1)}\dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right)$, a je tedy podle (a) a (d) roven
$\det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) + \sum_{j\neq i}\gamma_j \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i-1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \vec{\mathbf{a}}^{(i+1)}\dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right)$. Všechny determinanty za sumačním znaménkem jsou ovšem podle (c) rovny nule.
(f) Označme sloupce matice $\mathbf{A}$ postupně $\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}$. Prohození sloupců $\vec{\mathbf{a}}^{(i)}$ a $\vec{\mathbf{a}}^{(j)}$ v det $\mathbf{A}$ lze docílit úpravami, které symbolicky vyznačím (sloupce, které se nemění, většinou nepíšu).

$$\det\mathbf{A} = \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) =$$
$$\overset{\substack{\text{podle}\\\text{(e)}}}{=} \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)} + \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) =$$
$$\overset{\substack{\text{podle}\\\text{(e)}}}{=} \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)} + \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(j)} - (\vec{\mathbf{a}}^{(i)} + \vec{\mathbf{a}}^{(j)}), \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) =$$
$$= \det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)} + \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, -\vec{\mathbf{a}}^{(i)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) =$$
$$\overset{\substack{\text{podle}\\\text{(a)}}}{=} -\det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)} + \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right) =$$
$$\overset{\substack{\text{podle}\\\text{(d) a (c)}}}{=} -\det\left(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(j)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(i)}, \dots, \vec{\mathbf{a}}^{(n)}\right).$$

Důsledek:
Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice řádu n. Vznikla-li matice $\mathbf{B}$ z matice $\mathbf{A}$ ekvivalentní úpravou řádků, platí det $\mathbf{B}$=det $\mathbf{T}\cdot$ det $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{T}$ je matice, která z jednotkové matice $\mathbf{I}$ řádu

n vznikla stejnou ekvivalentní úpravou řádků, tj. vznikla-li matice $\mathbf{T}$ z matice $\mathbf{I}$ ekvivalentní úpravou řádků, platí

$$\det \mathbf{TA} = \det \mathbf{T} \cdot \det \mathbf{A}$$

(neboť z pomocné věty na str. 10 víme, že $\mathbf{B}=\mathbf{TA}$).

Důkaz:
(1) prohození i-tého a j-tého řádku:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&& \\
&& 1 &&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & 1 & \cdots && \\
&&& \vdots & 1\ \ddots\ 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & 0 & \cdots && \\
&&&&&& 1 && \\
&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \cdots i\text{-tý řádek} \\ \\ \cdots j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Protože $\det \mathbf{I} = 1$, je podle tvrzení (f) $\det \mathbf{T} = -1$, a tedy $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{T} \cdot \det \mathbf{A}$.

(2) násobení i-tého řádku číslem $c \neq 0$:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& c & \cdots && \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \cdots\cdots i\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Podle tvrzení (a) je $\det \mathbf{T}=c$, a tedy opět $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{T} \cdot \det \mathbf{A}$.

(3) připočtení i-tého řádku k j-tému řádku:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}
1 &&&&& \\
& \ddots &&&& \\
&& 1 & \cdots & \cdots & \\
&& \vdots & \ddots && \\
&& 1 & \cdots 1 & \cdots & \\
&&&& \ddots & \\
&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \cdots\cdots i\text{-tý řádek} \\ \\ \cdots\cdots j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Podle tvrzení (e) je $\det \mathbf{T} = 1$, a tedy $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{T} \cdot \det \mathbf{A}$.

Poznámka:
Stejná tvrzení platí pochopitelně i pro sloupcové úpravy.

Věta 42:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pak $\mathbf{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz:
Matici $\mathbf{A}$ lze ekvivalentními úpravami řádků převést na matici $\mathbf{B}$, která je v horním stupňovitém tvaru. Podle dokázaného důsledku se determinant matice $\mathbf{A}$ po každé úpravě násobí číslem různým od nuly (-1 při záměně řádků, c při násobení řádku číslem c a 1 při připočtení řádku k druhému).
Je tedy $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow \det \mathbf{B} \neq 0$. Ale determinant matice $\mathbf{B}$ je součin jejích diagonálních prvků (neboť je trojúhelníková), a je tedy nenulový, právě když všechny sloupce jsou hlavní, tj. když hodnost $\mathbf{A}$ je n.

Věta 43:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou čtvercové matice řádu n. Pak $\det \mathbf{PQ} = \det \mathbf{P} \cdot \det \mathbf{Q}$.

Důkaz:
1) Nechť $\mathbf{P}$ je singulární $\iff \det \mathbf{P} = 0$ a $h(\mathbf{P}) < n$.
Podle věty 33 je $h(\mathbf{PQ}) \leq h(\mathbf{P}) < n \Rightarrow \mathbf{PQ}$ je singulární $\Rightarrow \det \mathbf{PQ}$=0.
2) Nechť $\mathbf{P}$ je regulární. Pak existuje matice $\mathbf{P}^{-1}$, platí $\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$, a tedy platí $\mathbf{P}=\left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{-1}$.
Platí tedy také $\mathbf{PQ}=\left(\mathbf{P}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Q}$.
Spočítáme tento součin technikou pro výpočet součinů tvaru $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ze strany 10. To znamená, že budeme provádět ekvivalentní úpravy řádků matice $\left(\mathbf{P}^{-1}|\mathbf{Q}\right)$ až dostaneme matici $\left(\mathbf{I}|\mathbf{PQ}\right)$.
(Zde je nutné si uvědomit, že ať užijeme jakékoliv řádkové úpravy, které zajistí, že na místě matice $\mathbf{P}^{-1}$ vznikne matice $\mathbf{I}$, vznikne na místě matice $\mathbf{Q}$ matice $\mathbf{PQ}$.)
Protože při tomto procesu vznikla matice $\mathbf{PQ}$ z matice $\mathbf{Q}$ ekvivalentními úpravami, platí podle důsledku ze strany 21

$$\det \mathbf{PQ} = \det \mathbf{T}_k \cdot \det \mathbf{T}_{k-1} \cdots \det \mathbf{T}_1 \cdot \det \mathbf{Q}, \qquad (\star)$$

kde $\mathbf{T}_i$ je matice, která odpovídá i-té úpravě (tj. vznikla z $\mathbf{I}$ touto úpravou).
Vztah ($\star$) platí pro každou matici řádu n, a tedy speciálně (při volbě $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$ a stejných úpravách) platí

$$\det \mathbf{P} = \det \mathbf{T}_k \cdot \det \mathbf{T}_{k-1} \cdots \det \mathbf{T}_1.$$

Je tedy $\det \mathbf{PQ} = \det \mathbf{P} \cdot \det \mathbf{Q}$.

Důsledek:
Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice. Pak $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$.

Důkaz:
Tvrzení je důsledkem vztahů $1 = \det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right) = \det \mathbf{A}^{-1} \cdot \det \mathbf{A}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}=(a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n > 1$. Nechť $\mathbf{A}^{(i,j)}$ je čtvercová matice řádu $n-1$, která z $\mathbf{A}$ vznikla vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce. Označme

$$\mathbf{D}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{A}^{(i,j)}.$$

Číslo $\mathbf{D}_{ij}$ se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij}.

Věta 45: (O rozvoji determinantu podle i-tého řádku, resp. j-tého sloupce)
Nechť $\mathbf{A}=(a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n > 1$ a $\mathbf{D}_{ij}$ jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} pro $i \in \hat{n}, j \in \hat{n}$.
Potom pro $i \in \hat{n}$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{D}_{ij}, \qquad \text{(rozvoj podle } i\text{-tého řádku)}$$

resp. pro $j \in \hat{n}$ platí

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{D}_{ij}. \qquad \text{(rozvoj podle } j\text{-tého sloupce)}$$

Tuto větu jsme uvedli bez důkazu.

Věta 46:

Nechť $\mathbf{A}=(a_{ij})$ je regulární čtvercová matice řádu $n > 1$ a $\mathbf{D}_{ij}$ jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} pro $i \in \hat{n}, j \in \hat{n}$.

Potom $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{21} & \dots & \mathbf{D}_{n1} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{D}_{n2} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{D}_{1n} & \mathbf{D}_{2n} & \dots & \mathbf{D}_{nn} \end{pmatrix}$.

Důkaz:
Stačí dokázat, že $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$. Zkoumejme tedy prvek na místě (i, j) tohoto součinu. Kdyby vzorec uvedený ve větě platil, je (podle vzorce pro násobení matic)

$[\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[a_{i1}\mathbf{D}_{j1} + a_{i2}\mathbf{D}_{j2} + \ldots + a_{in}\mathbf{D}_{jn}]$.

Podle věty 45 je výraz v hranaté závorce pro $i = j$ roven $\det \mathbf{A}$ (výpočet rozvojem podle i-tého řádku), a tedy $[\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}]_{ii} = 1$ pro $i \in \hat{n}$.
Podle téže věty je výraz v hranaté závorce pro $i \neq j$ rozvoj podle j-tého řádku ovšem determinantu matice, která vznikne, když v matici $\mathbf{A}$ nahradíme j-tý řádek znovu i-tým řádkem. Rozvoj v hranaté závorce je v tomto případě roven nule, protože jde o determinant matice se dvěma stejnými řádky.
Tím je věta dokázána.

Poznámka:
Matici $\mathbf{A}^{adj} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{21} & \dots & \mathbf{D}_{n1} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{D}_{n2} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{D}_{1n} & \mathbf{D}_{2n} & \dots & \mathbf{D}_{nn} \end{pmatrix}$ se říká matice **adjungovaná** k matici $\mathbf{A}$.

Věta 47: (Cramerovo pravidlo)
Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n a $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{C}^n$. Označme $\mathbf{B}^{(i)}$ matici, která z matice $\mathbf{A}$ vznikne při náhradě i-tého sloupce vektorem $\vec{\mathbf{b}}$. Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ je řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.
Potom pro $i \in \hat{n}$ platí $x_i = \frac{\det \mathbf{B}^{(i)}}{\det \mathbf{A}}$.

Důkaz:
Víme, že $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}$ a tedy ze vzorce pro výpočet inverzní matice ve větě 46 plyne
$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[\mathbf{D}_{1i}b_1 + \mathbf{D}_{2i}b_2 + \ldots + \mathbf{D}_{ni}b_n]$.
Snadno uvážíme, že výraz v hranaté závorce je rozvoj determinantu matice, která z matice $\mathbf{A}$ vznikla po nahrazení i-tého sloupce vektorem $\vec{\mathbf{b}}$, podle tohoto nového i-tého sloupce. Tím je věta dokázána.

Poznámka:
Je třeba říci, že Cramerovo pravidlo i vzorec z věty 46 se hodí k výpočtům pouze u malých matic (jinak jsou to vzorce neekonomické kvůli velkému počtu aritmetických operací). V teorii mají ovšem velký význam.

Skalární součin a ortogonalita

Důležité upozornění:
V této kapitole budeme pod pojmem **těleso** rozumět výhradně buď těleso všech komplexních čísel, nebo těleso všech reálných čísel. Důvodem pro toto omezení je skutečnost, že v obecném tělese **nemusí** platit implikace

$$\alpha \in \mathbf{T} \Longleftrightarrow \overline{\alpha} \in \mathbf{T}.$$

Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Kromě operací sčítání vektorů a násobení vektoru číslem, které jsou v každém vektorovém prostoru zavedeny, se studují i prostory s další operací, která se nazývá skalární součin a je dána následující definicí.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Zobrazení $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ do $\mathbf{T}$, které každé dvojici vektorů $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ z $\mathbf{V}$ přiřadí číslo $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \in \mathbf{T}$ se nazývá **skalární součin**, pokud splňuje následující čtyři vlastnosti:
1) Pro každé dva vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ z $\mathbf{V}$ je $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \overline{(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})}$.
2) Pro každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$ je $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \geq 0$; $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$.
3) Pro každé tři vektory $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$ a $\vec{\mathbf{z}}$ z $\mathbf{V}$ je $(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}}) = (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{z}}) + (\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{z}})$.
4) Pro každé dva vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ z $\mathbf{V}$ a číslo $\alpha \in \mathbf{T}$ je $(\alpha\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \alpha(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$.

Poznámky:
0) Pro lib. $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$ je $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{o}}) = (\vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{x}}) = 0$.
(Neboť $(\vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{x}}) = (0\vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{x}}) = 0(\vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{x}}) = 0$.)
1) Pokud prostor $\mathbf{V}$ je reálný, tj. $\mathbf{T}$=$\mathbf{R}$, platí $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})$.
2) Z vlastností 1) a 4) plyne $(\vec{\mathbf{x}}, \alpha\vec{\mathbf{y}}) = \overline{\alpha}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$.
Z vlastností 1) a 3) plyne $(\vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{x}}) + (\vec{\mathbf{z}}, \vec{\mathbf{y}})$.
3) **Příklad skalárního součinu na prostoru $\mathbf{C}^n$.**
Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ a $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$. Definujeme tzv. **standardní skalární součin** vztahem $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$. Obdobně definujeme na prostoru $\mathbf{R}^n$ **standardní skalární součin** vztahem $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.
4) Prostor $\mathbf{R}^n$ se standardním skalárním součinem nazýváme **eukleidovský prostor** a analogicky prostor $\mathbf{C}^n$ se standardním skalárním součinem nazýváme **unitární prostor**.
Jsou to tedy prostory, na kterých jsou definovány **tři** operace.
5) Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ se skalárním součinem a $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$, nazýváme číslo $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})}$ **norma vektoru $\vec{\mathbf{x}}$.**
Speciálně v prostoru $\mathbf{R}^n$ (a někdy i v $\mathbf{C}^n$) se standardním skalárním součinem se číslo $\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})}$ nazývá **eukleidovská norma vektoru $\vec{\mathbf{x}}$**. Snadno si rozmyslíme, že v $\mathbf{R}^1$,$\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ má eukleidovská norma význam velikosti vektoru.
Snadno prověříme, že $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$ a $\|\alpha\vec{\mathbf{x}}\| = |\alpha|\ \|\vec{\mathbf{x}}\|$.

Věta 48:(Schwarzova (Cauchyova) nerovnost)
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$. Pak pro každé dva vektory $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}$ platí

$$|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\|.$$
Rovnost nastává, právě když vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ jsou lineárně závislé.
Důkaz:
Pokud $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$, je nerovnost zřejmá.
Omezíme se tedy na případ $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$. Zavedeme vektor $\vec{\mathbf{z}}$ vztahem $\vec{\mathbf{z}} = \frac{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}\vec{\mathbf{x}}$. Platí vztahy $(\vec{\mathbf{z}},\vec{\mathbf{y}}) = \frac{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}{\|\vec{\mathbf{x}}^2\|}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = \frac{|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}$
a $\|\vec{\mathbf{z}}\|^2 = \left(\frac{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}\vec{\mathbf{x}}, \frac{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}\vec{\mathbf{x}}\right) = \frac{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})\overline{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^4}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}) = \frac{|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}$.
Z prvního vztahu je zřejmé, že součin $(\vec{\mathbf{z}},\vec{\mathbf{y}})$ je reálný, a tedy následující výrazy si jsou rovny $(\vec{\mathbf{z}},\vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}) = \|\vec{\mathbf{z}}\|^2 = \frac{|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}$.
Z toho plyne
$0 \leq (\vec{\mathbf{z}}-\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}-\vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{z}}\|^2 - (\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}) - (\vec{\mathbf{z}},\vec{\mathbf{y}}) + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = -\frac{|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2.$ $(\star)$
Nerovnost $|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\|$ tedy platí.
Vyšetříme, kdy nastane rovnost.
Jsou-li vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ lineárně závislé, je jeden z nich násobkem druhého. Nechť např. $\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{y}}$. Pak $|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| = |(\alpha\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{y}})| = |\alpha|\|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = \|\alpha\vec{\mathbf{y}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\|$. Je-li naopak $|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| = \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\|$, pak je buď $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$, a tedy vektory $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$ jsou lineárně závislé, nebo $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ a výraz na pravé straně vztahu $(\star)$ je roven nule. Z toho ovšem plyne $\|\vec{\mathbf{z}}-\vec{\mathbf{y}}\|$=0, z toho $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{z}} = \frac{(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}})}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}\vec{\mathbf{x}}$, a tudíž vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ jsou lineárně závislé.

Věta 49:(Trojúhelníková nerovnost)
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$. Pak pro každé dva vektory $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}$ platí
$$\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|.$$
Rovnost nastává, právě když existuje číslo $\alpha \in \mathbf{T}$, $\alpha \geq 0$ tak, že buď $\vec{\mathbf{y}} = \alpha\vec{\mathbf{x}}$, nebo $\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{y}}$.
Důkaz:
Platí následující vztahy
$\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 = (\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2Re(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \leq$
$\leq \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\sqrt{Re^2(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) + Im^2(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})} + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 \leq$ $(\star)$
$\overset{\text{(Schwarzova nerovnost)}}{\leq} \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = (\|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|)^2.$

Nerovnost tedy platí.

Předpokládejme, že platí rovnost $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$. Pak se všechny nerovnosti ve vztazích $(\star)$ mění na rovnosti a z toho plyne:
(a) $|(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| = \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\|$,
(b) $Re(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = |(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})| \Longrightarrow Re(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \geq 0, Im(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = 0$,
a tudíž $Re(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) = (\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}})$.

Z (a) a Schwarzovy nerovnosti plyne, že vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ jsou lineárně závislé, tj. existuje $\alpha \in \mathbf{T}$, že buď $\vec{\mathbf{y}} = \alpha\vec{\mathbf{x}}$, nebo $\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{y}}$. Zbývá dokázat, že existuje takové **nezáporné** α. V případě, že oba vektory jsou nulové, je to zřejmé. Nechť např. $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ a $\vec{\mathbf{y}} = \alpha\vec{\mathbf{x}}$. Z (b) plyne $(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}) \geq 0$, tj.
$(\vec{\mathbf{x}},\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \overline{\alpha}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 \geq 0 \Longrightarrow \overline{\alpha} \geq 0 \Longrightarrow \alpha \geq 0.$

Naopak, je-li $\vec{\mathbf{y}} = \alpha\vec{\mathbf{x}}$ a $\alpha \geq 0$, platí $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}+\alpha\vec{\mathbf{x}}\| = |1+\alpha| \cdot \|\vec{\mathbf{x}}\| = (1+\alpha)\|\vec{\mathbf{x}}\| =$

$\|\vec{\mathbf{x}}\| + \alpha\|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\alpha\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$.

S pojmem skalárního součinu úzce souvisí další důležitý pojem.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$. Řekneme, že dva vektory $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}$ jsou **ortogonální** (kolmé), jestliže $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = 0$. Užíváme označení $\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{y}}$.
Řekneme, že soubor vektorů $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je **ortogonální** (OG), právě když $\vec{\mathbf{x}}^{(i)} \perp \vec{\mathbf{x}}^{(j)}$ pro všechna $i, j \in \hat{n}$, kde $i \neq j$.
Splňuje-li tento soubor navíc podmínku $\|\vec{\mathbf{x}}^{(i)}\| = 1$ pro všechna $i \in \hat{n}$, říkáme, že je **ortonormální** (ON) (tj. platí $(\vec{\mathbf{x}}^{(i)}, \vec{\mathbf{x}}^{(j)}) = \delta_{ij}$ pro všechna $i, j \in \hat{n}$).

Poznámka:
Všimneme si, že zatímco vektory ortonormálního souboru jsou nutně nenulové, u ortogonálního souboru to tak být nemusí.

Příklad:
Standardní báze prostoru $\mathbf{C}^n$ (resp. $\mathbf{R}^n$) se standardním skalárním součinem je ortonormální soubor.

Věta 50:
Ortogonální soubor nenulových vektorů je lineárně nezávislý.
Důsledek:
Ortonormální soubor je lineárně nezávislý.
Důkaz:(Sporem)
Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je lineárně závislý soubor a $\vec{\mathbf{x}}^{(i)} \neq \vec{\mathbf{o}}$ pro $i \in \hat{n}$. Existuje tedy n-tice čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a index i_0 tak, že $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$
a $\alpha_{i_0} \neq 0$.
Platí tedy i rovnost $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0)}\right) = (\vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0)}) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{\mathbf{x}}^{(i)}, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0)}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{i_0} \|\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)}\|^2 = 0_{(\text{neboť soubor je ortogonální})} \Rightarrow \alpha_{i_0} = 0$ $_{(\text{neboť } \vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} \neq \vec{\mathbf{o}})}$.
A to je hledaný spor.

Věta 51:
Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je lineárně nezávislý soubor vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem. Potom existuje ortonormální soubor vektorů $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ tak, že pro každé $r \in \hat{n}$ platí

$$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(r)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(r)}]_\lambda.$$

Poznámka:
Pokud se nám podaří takový soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ najít, říkáme, že jsme soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ **ortonormalizovali**.
Důsledek:
Nenulový vektorový prostor konečné dimenze má ortonormální bázi.
Důkaz:
Důkaz provedeme tak, že vysvětlíme rekurzivním způsobem postup, kterým se ortonormální soubor s uvedenými vlastnostmi získá. Postup je znám pod jménem **Gram-Schmidtův ortogonalizační proces**.
Nejprve zvolíme $\vec{\mathbf{y}}^{(1)} = \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(1)}\|}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}$.

Jasně platí: (a) $[\vec{\mathbf{y}}^{(1)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}]_\lambda$,
(b) $\|\vec{\mathbf{y}}^{(1)}\|=1$.

Druhý vektor konstruovaného souboru najdu následujícím způsobem:
Nejprve najdu pomocný vektor $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)}$ tak, aby platilo:

(a) $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)} \perp \vec{\mathbf{y}}^{(1)}$,
(b) $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}]_\lambda$.

Hledám ho ve tvaru $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)} = \vec{\mathbf{x}}^{(2)} - \alpha_1 \vec{\mathbf{y}}^{(1)}$, a tím si zajistím vlastnost (b).
Protože chci, aby platilo i (a), musí být splněno
$(\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)}) = 0 \Rightarrow 0 = (\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)}) - \alpha_1 \|\vec{\mathbf{y}}^{(1)}\|^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 = (\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)})$ (neboť $\|\vec{\mathbf{y}}^{(1)}\| = 1$)$\Rightarrow \tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)} = \vec{\mathbf{x}}^{(2)} - (\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)})\vec{\mathbf{y}}^{(1)}$.
Položíme-li $\vec{\mathbf{y}}^{(2)} = \frac{1}{\|\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)}\|}\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(2)}$, má tento vektor vlastnosti (a) i (b) a navíc je $\|\vec{\mathbf{y}}^{(2)}\|=1$. Soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)})$ je ortonormální, a tudíž lineárně nezávislý,
$\vec{\mathbf{y}}^{(1)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}]_\lambda$, $\vec{\mathbf{y}}^{(2)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}]_\lambda$, a proto $[\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}]_\lambda$.

Předpokládejme nyní, že se nám podařilo ortonormalizovat vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(l)}$, tj. najít vektory $\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{y}}^{(l)}$ tak, že $(\vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \vec{\mathbf{y}}^{(j)}) = \delta_{ij}$ pro $i, j \in \hat{l}$
a $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(r)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{y}}^{(r)}]_\lambda$ pro $r \in \hat{l}$. Nejprve najdu pomocný vektor $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)}$ tak, aby platilo:

(a) $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)} \perp \vec{\mathbf{y}}^{(k)}$ pro $k \in \hat{l}$,
(b) $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(l+1)}]_\lambda$.

Hledám ho ve tvaru $\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)} = \vec{\mathbf{x}}^{(l+1)} - \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$, a tím si zajistím vlastnost (b), neboť $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(l)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{y}}^{(l)}]_\lambda$.
Protože chci, aby platilo i (a), musí pro $k \in \hat{l}$ být splněno
$(\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(k)}) = 0 \Rightarrow (\vec{\mathbf{x}}^{(l+1)} - \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \vec{\mathbf{y}}^{(k)}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\vec{\mathbf{x}}^{(l+1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(k)}) - \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i (\vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \vec{\mathbf{y}}^{(k)}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_k = (\vec{\mathbf{x}}^{(l+1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(k)})$ pro $k \in \hat{l}$ (neboť $(\vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \vec{\mathbf{y}}^{(j)}) = \delta_{ij}$ pro $i, j \in \hat{l}$)$\Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)} = \vec{\mathbf{x}}^{(l+1)} - \sum\limits_{i=1}^{l} (\vec{\mathbf{x}}^{(l+1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(i)})\vec{\mathbf{y}}^{(i)}$.
Položíme-li $\vec{\mathbf{y}}^{(l+1)} = \frac{1}{\|\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)}\|}\tilde{\vec{\mathbf{y}}}^{(l+1)}$, má tento vektor vlastnosti (a) i (b) a navíc je $\|\vec{\mathbf{y}}^{(l+1)}\|=1$.
Soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{y}}^{(l+1)})$ je ortonormální, a tudíž lineárně nezávislý, $\vec{\mathbf{y}}^{(k)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(l+1)}]_\lambda$ pro $k \in \widehat{l+1}$, a proto
$[\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{y}}^{(l+1)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(l+1)}]_\lambda$.

Věta 52:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$
a $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je jeho ortonormální báze. Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$. Potom $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}^{(i)})\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Důkaz:
Víme, že lze psát $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, neboť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbf{V}$. Pro $i \in \hat{n}$ platí

$(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}^{(i)}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\vec{\mathbf{x}}^{(i)}) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i.$

Poznámka:
Součiny $(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}^{(i)})$ jsou tedy souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ vzhledem k ortonormální bázi. Nechť nyní $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\dots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je pouze ortogonální báze $\mathbf{V}$. Potom soubor $(\frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(1)}\|}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(2)}\|}\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\dots,\frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\|}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je ortonormální báze. Víme, že souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ vzhledem k této ortonormální bázi jsou $(\vec{\mathbf{x}}, \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(i)}\|}\vec{\mathbf{x}}^{(i)})$. Platí proto $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(i)}\|}(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}^{(i)})\frac{1}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(i)}\|}\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$. Souřadnice vzhledem k ortogonální bázi $\mathcal{X}$ tedy jsou $\frac{(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}^{(i)})}{\|\vec{\mathbf{x}}^{(i)}\|^2}$, $i \in \hat{n}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{V}$. Množinu

$$\mathbf{P}^{\perp} = \{\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{V} | \vec{\mathbf{y}} \perp \vec{\mathbf{x}} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}\}$$

nazýváme **ortogonální doplněk** podprostoru $\mathbf{P}$ ve $\mathbf{V}$.

Věta 53:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{V}$ (dim $\mathbf{V} < \infty$). Pak také $\mathbf{P}^{\perp} \subset\subset \mathbf{V}$ a platí

$$\text{(a) } \mathbf{V}{=}\mathbf{P}\oplus\mathbf{P}^{\perp},$$
$$\text{(b) } (\mathbf{P}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{P}.$$

Důkaz:
Abychom dokázali, že $\mathbf{P}^{\perp} \subset\subset \mathbf{V}$, stačí dokázat uzavřenost vůči operacím.
Nechť tedy $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}^{\perp} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{z}}$ a $\vec{\mathbf{y}} \perp \vec{\mathbf{z}} \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{z}}) = 0$ a $(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}) = 0 \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow (\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}) = 0 \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}} \perp \vec{\mathbf{z}} \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}^{\perp}$.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}^{\perp}$ a $\alpha \in \mathbf{T} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{z}} \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow (\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{z}}) = 0 \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{z}}) = 0 \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow \alpha\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{z}} \quad \forall \vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P} \Rightarrow \alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}^{\perp}$.

(a) Nejprve dokážeme, že $\mathbf{V}{=}\mathbf{P}{+}\mathbf{P}^{\perp}$.
Pro $\mathbf{P} = \{\vec{\mathbf{o}}\}$ je to zřejmé, neboť v tom případě je $\mathbf{P}^{\perp} = \mathbf{V}$.
Je-li $\mathbf{P} = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\dots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_{\lambda}$ s ortonormální bází $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\dots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$, je každý vektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}$ roven součtu $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}$, kde $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{j=1}^{k} (\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{x}}^{(j)})\vec{\mathbf{x}}^{(j)}$
a $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{v}} - \sum\limits_{j=1}^{k} (\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{x}}^{(j)})\vec{\mathbf{x}}^{(j)}$. Vektor $\vec{\mathbf{x}}$ leží zřejmě v $\mathbf{P}$.
Snadno se přesvědčíme, že pro $i \in \hat{k}$ platí $(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{x}}^{(i)}) = 0$. Každý vektor $\vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P}$ je lineární kombinací souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\dots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$, a tedy i pro něj platí
$(\vec{\mathbf{y}},\vec{\mathbf{z}}) = 0$. Vektor $\vec{\mathbf{y}}$ tedy leží v $\mathbf{P}^{\perp}$.
Abychom dokázali, že $\mathbf{V}{=}\mathbf{P}\oplus\mathbf{P}^{\perp}$, zbývá dokázat $\mathbf{P} \cap \mathbf{P}^{\perp} = \{\vec{\mathbf{o}}\}$. Nechť tedy $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P} \cap \mathbf{P}^{\perp}$. Neboť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}^{\perp}$, musí být jeho součin s každým vektorem z $\mathbf{P}$ roven nule, a tedy speciálně musí být $(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{x}}) = 0$. Z toho plyne $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$.

(b) Jednoduchým důsledkem definice je inkluze $(\mathbf{P}^{\perp})^{\perp} \supset \mathbf{P}$, neboť vektory z $\mathbf{P}$ jsou kolmé na všechny vektory z $\mathbf{P}^{\perp}$.
Dokážeme ještě inkluzi $(\mathbf{P}^{\perp})^{\perp} \subset \mathbf{P}$.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in (\mathbf{P}^{\perp})^{\perp}$. Neboť také $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$, je podle (a) $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$, kde $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{P}$

a $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{P}^{\perp}$.
Platí $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}})$. Platí $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{b}}) = 0$, neboť $\vec{\mathbf{x}} \in (\mathbf{P}^{\perp})^{\perp}$ a $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{P}^{\perp}$. Platí $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = 0$, neboť $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{P}$ a $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{P}^{\perp}$.
Je tedy $(\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}}) = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$.

Důsledek:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{V}$ ($\dim \mathbf{V} < \infty$).
Každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$ lze psát jednoznačně ve tvaru

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}^{\perp}},$$

kde $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}} \in \mathbf{P}$ a $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}^{\perp}} \in \mathbf{P}^{\perp}$.
Vektor $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}}$ se nazývá **ortogonální průmět** $\vec{\mathbf{x}}$ do podprostoru $\mathbf{P}$.

Konstrukce (ortogonálního průmětu):
Z důkazu věty 53 je zřejmé, že je-li dána ortonormální báze $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ podprostoru $\mathbf{P}$, platí
$\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}} = \sum\limits_{j=1}^{k} (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}^{(j)}) \vec{\mathbf{x}}^{(j)}$ a $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{P}^{\perp}} = \vec{\mathbf{x}} - \sum\limits_{j=1}^{k} (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}^{(j)}) \vec{\mathbf{x}}^{(j)}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbf{T}$,
$\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ je ortonormální soubor ve $\mathbf{V}$ a $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$. Potom číslo $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}^{(i)})$ se nazývá ***i*-tý Fourierův koeficient** vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ vzhledem k souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)})$.

Poznámka:
Z předcházející konstrukce je zřejmé, že Fourierovy koeficienty jsou souřadnice ortogonálního průmětu vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ do podprostoru $\mathbf{P}$ v ortonormální bázi tohoto podprostoru.

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Poznamenejme nejprve, že pokud neřekneme jinak, jsou matice v této kapitole komplexní a vektory jsou vektory z prostoru $\mathbf{C}^n$. Dále poznamenejme, že
v této kapitole pod pojmem „skalární součin“ míníme vždy standardní skalární součin.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ nazveme **vlastním číslem** matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{C}^n$, $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ tak, že $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$. Každý takový vektor $\vec{\mathbf{x}}$ nazveme **vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$ příslušný k vlastnímu číslu λ.
Množinu všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ značíme $\sigma(\mathbf{A})$ a nazýváme **spektrum matice A**.

Věta a definice 54:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a λ její vlastní číslo. Množina všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ tvoří (po přidání nulového vektoru) podprostor v $\mathbf{C}^n$. Dimenzi tohoto podprostoru značíme $\nu_g(\lambda)$ a nazýváme **geometrická násobnost vlastního čísla** λ.

Poznámka:
Geometrická násobnost vlastního čísla je tedy rovna počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů, které k němu příslušejí.

Důkaz:(toho, že jde o podprostor)
Nechť $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ jsou vlastní vektory příslušné λ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} = \lambda\vec{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} + \lambda\vec{\mathbf{y}} = \lambda(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})$.
Tedy i $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ je vlastní vektor příslušný λ.
Stejně, je-li $\alpha \in \mathbf{C}$, platí $\mathbf{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \alpha\lambda\vec{\mathbf{x}} = \lambda(\alpha\vec{\mathbf{x}})$.

Každý vlastní vektor $\vec{\mathbf{x}}$ příslušný λ splňuje
$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} \Longleftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}},$$
tj. je netriviálním řešením homogenní soustavy s maticí $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Ve Frobeniově větě se říká, že $\dim \mathbf{S}_0 = n - h$, a tedy netriviální řešení této homogenní soustavy existuje, právě když $n > h$, a tedy (podle věty 42) právě když
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \qquad (\star)$$
Tedy každé vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ je kořenem této rovnice.
Naopak, je-li λ kořenem $(\star)$, je matice $\mathbf{A}$-$\lambda\mathbf{I}$ singulární, tj. $h < n$, a tedy existuje nenulový vektor $\vec{\mathbf{x}}$ tak, že $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$, tj. existuje vlastní vektor příslušný λ.

Věta a definice 55:
Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ je vlastním číslem čtvercové matice $\mathbf{A}$, právě když je kořenem rovnice
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$
Tato rovnice se nazývá **charakteristická rovnice matice A** a její levá strana se nazývá **charakteristický polynom matice A**. Značíme ho $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Poznámka:
$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$ je skutečně polynom stupně n, neboť každý člen determinantu je polynom v λ.

Ze všech členů má nejvyšší stupeň součin

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

a $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ má tedy tvar

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n.$$

Snadno zjistíme hodnotu absolutního členu b_n. Pro každé $\lambda\in\mathbf{C}$ platí

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(-1)^n\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n,$$

a tedy speciálně při volbě $\lambda=0$ dostaneme $b_n=\det\mathbf{A}$.

Polynom $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ je polynom n-tého stupně, a má tedy (počítáno s násobností) n komplexních kořenů $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Jak víme z přípravného kurzu, lze ho psát ve tvaru

$p_{\mathbf{A}}(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, neboť koeficient u λ^n je $(-1)^n$.

Z toho plyne $p_{\mathbf{A}}(0)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. Protože také platí $p_{\mathbf{A}}(0)=\det\mathbf{A}$, dostali jsme důležitý vztah

$$\det\mathbf{A}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

Poznámka:

Je-li $\mathbf{A}$ trojúhelníková matice, např. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$,

je $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda)$, a tudíž jsou jejími vlastními čísly diagonální prvky $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$.

Stejné tvrzení platí speciálně pro diagonální matice.

Definice:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice a λ její vlastní číslo. **Algebraickou násobností vlastního čísla** λ nazveme jeho násobnost jakožto kořene charakteristického polynomu $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Algebraickou násobnost vlastního čísla λ značíme $\nu_a(\lambda)$.

Poznámka:

Algebraická násobnost kořene polynomu byla definována v přípravném kurzu.

Věta 56:

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a λ_0 její vlastní číslo. Pak

$$\nu_g(\lambda_0)\le\nu_a(\lambda_0).$$

Důkaz:

Označme $\nu_g(\lambda_0)=k$. $\Longrightarrow$ Existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ příslušných k λ_0. Doplníme tento k-členný soubor na bázi $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ prostoru $\mathbf{C}^n$.

Označme $\mathbf{X}$ matici, která má za své sloupečky vektory této báze, což můžeme symbolicky zapsat $\mathbf{X}=\left(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$.

Matice $\mathbf{X}$ je regulární, proto existuje matice $\mathbf{X}^{-1}$ a platí $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}=\mathbf{I}$.

Poslední vztah lze symbolicky zapsat

$\mathbf{X}^{-1}\left(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)=\left(\vec{\mathbf{e}}^{(1)},\vec{\mathbf{e}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{e}}^{(n)}\right)$. Z toho je zřejmé, že pro $i\in\hat{n}$ platí

$$\mathbf{X}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\vec{\mathbf{e}}^{(i)}\qquad(\star).$$

(Stačí si uvědomit, že násobit matici zleva maticí, kterou označíme např. $\mathbf{P}$, je totéž jako

násobit jednotlivé sloupce této matice maticí $\mathbf{P}$.)
V podobném symbolickém zápisu platí
$\mathbf{AX}=\left(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\ldots,\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\mathbf{Y}\right)=\left(\lambda_0\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\ldots,\lambda_0\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\mathbf{Y}\right)$,
kde jsme označili $\mathbf{Y}=\left(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)},\ldots,\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$ ($\mathbf{Y}$ je matice o n řádcích a $n-k$ sloupcích).
Z tohoto vztahu a z ($\star$) plyne
$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}=\left(\lambda_0\mathbf{X}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\ldots,\lambda_0\mathbf{X}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}\right)=\left(\lambda_0\vec{\mathbf{e}}^{(1)},\ldots,\lambda_0\vec{\mathbf{e}}^{(k)},\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}\right)$.
Rozepíšeme-li matici $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}$ po prvcích, je tedy tvaru

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & & 0 & c_{1,k+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & & 0 & c_{2,k+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_0 & c_{k,k+1} & \cdots & c_{kn} \\ 0 & 0 & & 0 & c_{k+1,k+1} & \cdots & c_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & c_{n,k+1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (\star\star).$$

Platí
$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det[\mathbf{X}(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{X}^{-1}]=\det\mathbf{X}\cdot\det(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}-\lambda\mathbf{I})\cdot\det\mathbf{X}^{-1}=$
$=\det(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}-\lambda\mathbf{I})$.

V posledním kroku jsme využili vztahu $\det\mathbf{X}\cdot\det\mathbf{X}^{-1}=\det\mathbf{I}=1$.
Charakteristický polynom $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ je tedy roven determinantu matice, kterou dostaneme, když v matici v ($\star\star$) odečteme od prvků na diagonálních místech λ. Použijeme-li na výpočet tohoto determinantu postupně větu o rozvoji podle 1., 2. až k-tého sloupce, zjistíme, že platí

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k\cdot\det(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}),$$

kde jsme označili

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{k+1,k+1} & \cdots & c_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,k+1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Číslo λ_0 je tedy alespoň k-násobným kořenem $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$, tj. platí $k\le\nu_a(\lambda_0)$.

Věta 57:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n a $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ jsou její vzájemně různá vlastní čísla. Nechť pro $i\in\hat{k}$ je $\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_i. Potom $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ je lineárně nezávislý soubor.

Důkaz:
Pro $k=1$ je tvrzení jasné.
Nechť $k\ge 2$. Důkaz provedeme sporem. Nechť soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ je lineárně závislý.
Podle věty 4 existuje index $l\in\hat{k}$ takový, že $\vec{\mathbf{x}}^{(l)}=\sum\limits_{i=1}^{l-1}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$
a soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(l-1)})$ je lineárně nezávislý. Z předpokladů věty plyne, že nemůže platit $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{l-1}=0$.

Platí jednak $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(l)} = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \lambda_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a na druhé straně
$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(l)} = \lambda_l \vec{\mathbf{x}}^{(l)} = \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \lambda_l \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Platí proto $\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_l) \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$. Lineární kombinace na levé straně je netriviální, neboť $\lambda_l \neq \lambda_i$ pro $i \in \widehat{l-1}$. Máme tedy spor, neboť soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(l-1)})$ je lineárně nezávislý.

Důsledek:
V $\mathbf{C}^n$ existuje báze složená pouze z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$, právě když pro všechna vlastní čísla λ matice $\mathbf{A}$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Důkaz:
Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Označme $n_i = \nu_g(\lambda_i)$.
Označme

$$\left.\begin{array}{l}
\vec{\mathbf{x}}_1^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(1)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_{n_1}^{(1)} \text{ lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné k } \lambda_1, \\
\vec{\mathbf{x}}_1^{(2)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_{n_2}^{(2)} \text{ lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné k } \lambda_2, \\
\ldots, \\
\vec{\mathbf{x}}_1^{(k)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(k)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_{n_k}^{(k)} \text{ lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné k } \lambda_k.
\end{array}\right\} \quad (\star)$$

Dokážeme, že všechny tyto vektory tvoří dohromady lineárně nezávislý soubor.
Jejich lineární kombinace má totiž tvar
$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i{}^{(1)} \vec{\mathbf{x}}_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i{}^{(2)} \vec{\mathbf{x}}_i^{(2)} + \ldots + \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i{}^{(k)} \vec{\mathbf{x}}_i^{(k)} = \vec{\mathbf{o}}$. Pro $l \in \hat{k}$ platí, že $\sum_{i=1}^{n_l} \alpha_i{}^{(l)} \vec{\mathbf{x}}_i^{(l)}$ je buď vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_l, nebo je to vektor nulový. Vlastní vektor to ovšem být nemůže, protože bychom se dostali do sporu s větou 57.
Proto je $\sum_{i=1}^{n_l} \alpha_i{}^{(l)} \vec{\mathbf{x}}_i^{(l)} = \vec{\mathbf{o}}$ pro $l \in \hat{k}$. Protože vektory $\vec{\mathbf{x}}_1^{(l)}, \vec{\mathbf{x}}_2^{(l)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_{n_l}^{(l)}$ jsou lineárně nezávislé, je $\alpha_1{}^{(l)} = \alpha_2{}^{(l)} = \ldots = \alpha_{n_l}{}^{(l)} = 0$ pro $l \in \hat{k}$.
Vektory vyjmenované ve $(\star)$ jsou tedy lineárně nezávislé, a přitom kterýkoliv jiný vlastní vektor je už jejich lineární kombinací.
Bázi $\mathbf{C}^n$ tvoří právě tehdy, když jejich celkový počet je n, tj. když

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Protože platí $n = \nu_a(\lambda_1) + \nu_a(\lambda_2) + \cdots + \nu_a(\lambda_k)$, je to právě tehdy, když

$$(\nu_a(\lambda_1) - n_1) + (\nu_a(\lambda_2) - n_2) + \cdots + (\nu_a(\lambda_k) - n_k) = 0.$$

Podle věty 56 jsou výrazy v kulatých závorkách nezáporná čísla, a proto rovnost nastane, právě když $\nu_a(\lambda_l) = n_l$ pro $l \in \hat{k}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou dvě čtvercové matice stejného řádu n. Říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **podobná** matici $\mathbf{B}$, existuje-li regulární matice $\mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}$.
(Říkáme, že $\mathbf{A}$ vznikla z $\mathbf{B}$ podobnostní transformací).

Poznámka:
Snadno si rozmyslíme, že platí:
(1) Je-li matice $\mathbf{A}$ podobná matici $\mathbf{B}$, je také matice $\mathbf{B}$ podobná matici $\mathbf{A}$.
(Neboť z $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1} = (\mathbf{X}^{-1})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}$.)
(2) Je-li matice $\mathbf{A}$ podobná matici $\mathbf{B}$ a matice $\mathbf{B}$ podobná matici $\mathbf{C}$, je matice $\mathbf{A}$ podobná matici $\mathbf{C}$.

$\Big($Neboť z $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{X} = (\mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{Y}\mathbf{X}).\Big)$

Věta 58:
Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou dvě čtvercové matice vzájemně podobné. Pak mají stejné charakteristické polynomy, tj. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$.

Důkaz:
Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}$. Pak
$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} - \lambda\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}) = \det[\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X}] =$
$= \det\mathbf{X}^{-1}\cdot\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\cdot\det\mathbf{X} = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$.

Poznámka:
Z právě dokázané věty plyne, že podobné matice mají stejná vlastní čísla
a algebraické násobnosti u jednotlivých vlastních čísel se rovnají.
Uvědomíme-li si, že za předpokladu $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{1}\mathbf{B}\mathbf{X}$ platí ekvivalence
$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{X}\vec{\mathbf{x}}) = \lambda(\mathbf{X}\vec{\mathbf{x}})$, zjistíme, že se rovnají také geometrické násobnosti.

Vzniká otázka jaký je nejjednodušší tvar, do kterého lze matici podobnostními transformacemi převést. Pokusíme se alespoň naznačit odpověď. Nejraději bychom byli, kdyby šlo každou matici takto převést na matici diagonální. To ovšem obecně **není pravda**.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Říkáme, že $\mathbf{A}$ je **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. když existuje regulární matice $\mathbf{X}$ řádu n a čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tak, že

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Věta 59:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná, právě když existuje báze $\mathbf{C}^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$.

Důkaz:
a) Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{C}^n$, přičemž $\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu pro λ_i pro $i \in \hat{n}$, tj. $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \lambda_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$. Označme $\mathbf{X}$ matici, která má za své sloupečky vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, tj.
$\mathbf{X} = \Big(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\Big)$.
Matice $\mathbf{X}$ je regulární, a tedy existuje inverzní matice $\mathbf{X}^{-1}$. Zřejmě platí
$\mathbf{A}\mathbf{X} = \Big(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\Big) = \Big(\lambda_1\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \lambda_2\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \lambda_n\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\Big) =$

$$= \mathbf{X}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

b) Nechť naopak existuje matice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ a regulární matice $\mathbf{X}$ tak, že platí

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Označíme-li sloupce matice $\mathbf{X}$ postupně $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$, tj. $\mathbf{X}=\left(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$, můžeme poslední rovnost rozepsat po sloupcích

$\left(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right) = \left(\lambda_1\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \lambda_2\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \lambda_n\vec{\mathbf{x}}^{(n)}\right)$,

a tedy $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \lambda_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ pro $i \in \hat{n}$. Matice $\mathbf{X}$ je regulární, tedy soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je lineárně nezávislý, a proto tvoří bázi $\mathbf{C}^n$.

Poznámka:
Protože víme, že báze $\mathbf{C}^n$ sestavená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ existuje právě tehdy, když pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{A}$ platí

$$\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda),$$

je to i podmínka pro to, aby matice $\mathbf{A}$ byla diagonalizovatelná.

Zavedeme nyní řadu pojmů spojených s pojmem matice. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$,

$$\mathbf{A}= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Již jsme si zavedli pojem matice **transponované**. Maticí **komplexně sdruženou** s maticí $\mathbf{A}$ nazveme matici

$$\overline{\mathbf{A}}= \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \ldots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{2n} \\ \ldots & & & \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \ldots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Podobně maticí **hermitovsky sdruženou**(konjugovanou) s maticí $\mathbf{A}$ nazveme matici

$$\mathbf{A}^{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{A}}^{\top} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \ldots & \overline{a}_{m1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{m2} \\ \ldots & & & \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \ldots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Poznámky:
1) Místo označení $\mathbf{A}^{\mathbf{H}}$ se někdy užívá označení $\mathbf{A}^*$.
2) Snadno si rozmyslíme (resp. už víme), že platí
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\top} = \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}^{\top}, (\mathbf{A}^{\top})^{\top} = \mathbf{A}, (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top}, (\alpha\mathbf{A})^{\top} = \alpha\mathbf{A}^{\top}$,
$\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}, \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}, \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}, \overline{\alpha\mathbf{A}} = \overline{\alpha}\overline{\mathbf{A}}$,
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathbf{H}} = \mathbf{A}^{\mathbf{H}} + \mathbf{B}^{\mathbf{H}}, (\mathbf{A}^{\mathbf{H}})^{\mathbf{H}} = \mathbf{A}, (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathbf{H}} = \mathbf{B}^{\mathbf{H}}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}, (\alpha\mathbf{A})^{\mathbf{H}} = \overline{\alpha}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Potom
a) $\mathbf{A}$ je **symetrická**, je-li **reálná** a $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$ (tj. $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i, j \in \hat{n}$),
b) $\mathbf{A}$ je **hermitovská**, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{H}}$ (tj. $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ pro $i, j \in \hat{n}$),
c) $\mathbf{A}$ je **ortogonální**, je-li **reálná** a $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\top} = \mathbf{I}$ (tj. řádky jsou ortonormální v $\mathbf{R}^n$),
d) $\mathbf{A}$ je **unitární**, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{H}} = \mathbf{I}$ (tj. řádky jsou ortonormální v $\mathbf{C}^n$),
e) $\mathbf{A}$ je **normální**, je-li $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{H}} = \mathbf{A}^{\mathbf{H}}\mathbf{A}$.

Věta 60:
a) $\mathbf{I}$ je unitární, resp. ortogonální matice.
b) Jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ unitární (resp. ortogonální) matice stejného řádu, je $\mathbf{AB}$ také unitární (resp. ortogonální) matice.
c) Je-li $\mathbf{A}$ unitární matice, je $|\det \mathbf{A}| = 1$ (resp. je-li $\mathbf{A}$ ortogonální, je buď $\det \mathbf{A} = +1$, nebo $\det \mathbf{A} = -1$).
d) Je-li $\mathbf{A}$ unitární (resp. ortogonální) matice, je $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathbf{H}}$.

Důkaz:
a) Je zřejmé z definice.
b) Platí $\mathbf{AA^H} = \mathbf{I}$, $\mathbf{BB^H} = \mathbf{I} \Longrightarrow (\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{\mathbf{H}} = \mathbf{ABB^HA^H} = \mathbf{I}$.
c) Zřejmě $\det \mathbf{A^H} = \overline{\det \mathbf{A}}$, a tedy
$1 = \det \mathbf{I} = \det(\mathbf{AA^H}) = \det \mathbf{A} \cdot \overline{\det \mathbf{A}} = |\det \mathbf{A}|^2$.
d) Je zřejmé z definice inverzní matice.

Poznámky:
1) Matice hermitovské (resp. symetrické) a matice unitární (resp. ortogonální) jsou normální.
2) Ze vztahu $\mathbf{AA^H} = \mathbf{I}$ je zřejmé, že řádky unitární (resp. ortogonální) matice tvoří při standardním skalárním součinu ortonormální soubor v $\mathbf{C}^n$ (resp. v $\mathbf{R}^n$). Protože platí i $\mathbf{A^HA} = \mathbf{I}$, mají stejnou vlastnost i sloupce unitární (resp. ortogonální) matice.

Již víme, že ne každá čtvercová matice je podobná diagonální matici. Z následující věty, kterou uvedeme bez důkazu, plyne, že platí alespoň to, že každá čtvercová matice je podobná trojúhelníkové matici.

Věta 61:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak existuje unitární matice řádu n tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{U^HRU},$$

kde $\mathbf{R}$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice.

Poznámka: Uvědomíme si, že platí $\mathbf{U^H} = \mathbf{U}^{-1}$, a tedy jde o podobnostní transformaci.

Při pátrání po dalších vlastnostech speciálních typů matic nám bude užitečné následující lemma.

Lemma:
Horní, resp. dolní trojúhelníková matice je normální, právě když je diagonální.

Důkaz:
($\Leftarrow$) Zřejmě platí, že když je trojúhelníková matice diagonální, je normální.
($\Rightarrow$) Budeme tedy předpokládat, že $\mathbf{A}$ je např. horní trojúhelníková matice a platí $\mathbf{AA^H} = \mathbf{A^HA}$, a dokážeme, že její mimodiagonální prvky jsou rovny nule. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ a tedy } \mathbf{A^H} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & & & \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \dots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matematickou indukcí dokážeme, že v i-tém řádku matice může být nenulový prvek pouze na diagonálním místě (tj. na i-tém místě).
a) $i = 1$

Porovnáním prvků na místě (1,1) v maticích $\mathbf{AA^H}$ a $\mathbf{A^H A}$ (tj. prvků v prvním řádku a prvním sloupci matic) dostaneme rovnost
$a_{11}\overline{a}_{11} + a_{12}\overline{a}_{12} + \cdots + a_{1n}\overline{a}_{1n} = \overline{a}_{11}a_{11} \iff |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 0 \iff$
$\iff a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = 0.$

b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro prvních $i-1$ řádků, tj.
$a_{j,j+1} = a_{j,j+2} = \cdots = a_{j,n} = 0$ pro $j \in \widehat{i-1}$.
Porovnáním prvků na místě (i,i) v maticích $\mathbf{AA^H}$ a $\mathbf{A^H A}$ (tj. prvků v i-tém řádku a i-tém sloupci matic) dostaneme rovnost
$a_{ii}\overline{a}_{ii} + a_{i,i+1}\overline{a}_{i,i+1} + \cdots + a_{in}\overline{a}_{in} = \overline{a}_{ii}a_{ii} \iff |a_{i,i+1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = 0 \iff$
$\iff a_{i,i+1} = a_{i,i+2} = \cdots = a_{in} = 0.$

Věta 62:
Nechť $\mathbf{A}$ je normální matice řádu n. Pak existuje unitární matice $\mathbf{U}$ řádu n tak, že
$$\mathbf{A} = \mathbf{U^H D U},$$
kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice.

Důkaz:
Podle věty 61 existuje unitární matice $\mathbf{U}$ a trojúhelníková matice $\mathbf{R}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{U^H R U}$.
Pokud se nám podaří dokázat, že platí $\mathbf{RR^H} = \mathbf{R^H R}$, bude podle dokázaného lemmatu matice $\mathbf{R}$ diagonální, a věta tedy platí.
Zřejmě je $\mathbf{R} = \mathbf{UAU^H}$ a $\mathbf{R^H} = \mathbf{UA^H U^H}$.
Z toho vyplývá (vzhledem k tomu, že $\mathbf{AA^H} = \mathbf{A^H A}$)
$\mathbf{RR^H} = \mathbf{UAU^H UA^H U^H} = \mathbf{UAA^H U^H} = \mathbf{UA^H AU^H} = \mathbf{UA^H U^H UAU^H} = \mathbf{R^H R}$.

Důsledek:
Je-li $\mathbf{A}$ normální matice, platí pro každé její vlastní číslo λ rovnost
$$\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda).$$

Věta 63:
1) Je-li $\mathbf{A}$ hermitovská (symetrická) matice, jsou všechna její vlastní čísla reálná.
2) Je-li $\mathbf{A}$ unitární (ortogonální) matice a λ její vlastní číslo, je $|\lambda| = 1$.

Důkaz:
1) $\mathbf{A}$ je hermitovská, tudíž normální, proto podle věty 62 existuje unitární matice $\mathbf{U}$ a matice $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{U^H D U}$. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$ jsou tedy podobné, a proto čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ (každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost). Platí $\mathbf{A^H} = \mathbf{U^H \overline{D} U}$. Z $\mathbf{A} = \mathbf{A^H}$ plyne $\mathbf{U^H D U} = \mathbf{U^H \overline{D} U} \Longrightarrow \mathbf{D} = \overline{\mathbf{D}}$, a tedy po prvcích $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$ pro $i \in \hat{n}$.

2) $\mathbf{A}$ je unitární, tudíž normální, proto podle věty 62 existuje opět unitární matice $\mathbf{U}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{U^H D U}$. Platí $\mathbf{A^H} = \mathbf{U^H \overline{D} U}$. Z $\mathbf{AA^H} = \mathbf{I}$ plyne $\mathbf{U^H D U U^H \overline{D} U} = \mathbf{U^H D \overline{D} U} = \mathbf{I} \Longrightarrow \mathbf{D\overline{D}} = \mathbf{I}$, a tedy po prvcích $\lambda_i \overline{\lambda}_i = 1$, tj. $|\lambda_i| = 1$ pro $i \in \hat{n}$.

Věta 64:
Nechť $\mathbf{A}$ je hermitovská matice. Pak vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou (při standardním skalárním součinu) ortogonální.

Důkaz:
Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda_1\vec{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} = \lambda_2\vec{\mathbf{y}}$. Znásobíme-li první vztah skalárně vektorem $\vec{\mathbf{y}}$ a druhý vektorem $\vec{\mathbf{x}}$, dostaneme vztahy

$$(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \lambda_1(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \text{ a } (\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}) = \lambda_2(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}). \qquad (\star)$$

V dalších úvahách použijeme toho, že každý vektor z $\mathbf{C}^n$ lze, když to potřebujeme, pokládat za matici o jediném sloupci. Pro každé dva vektory $\vec{\mathbf{u}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$ z $\mathbf{C}^n$ platí tedy rovnost $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}}^{\mathbf{H}}\vec{\mathbf{u}}$ (v tom smyslu, že na levé straně je standardní skalární součin, tj. číslo, a napravo součin matic, tj. matice o jediném prvku). Říkáme tomu maticový přepis skalárního součinu.
Platí tedy následující rovnosti
$(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{y}}^{\mathbf{H}}\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathbf{H}}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}})^{\mathbf{H}}\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}, \mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}) = \overline{(\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})}$. Z rovnosti prvního a posledního výrazu vyplývá (vzhledem k tomu, že platí $(\star)$ a že vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou reálná)
$\lambda_1(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \lambda_2\overline{(\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}})} = \lambda_2(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = 0$, a tedy platí $(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = 0$, neboť $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Pro reálné symetrické matice zavádíme důležitý pojem.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice řádu n. Zobrazení $F(\vec{\mathbf{x}})$, které každému vektoru $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ přiřadí reálné číslo $F(\vec{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})$, se nazývá **kvadratická forma** a matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice** této **kvadratické formy**.

Poznámky:
1) Ještě jednou připomeneme, že skalární součin užitý v definici je standardní skalární součin. Označíme-li složky vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ písmeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lze kvadratickou formu chápat jako funkci n proměnných $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Platí

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\vec{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) =$$

$$= \begin{array}{l} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)x_1 + \\ +(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)x_2 + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ +(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)x_n \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}{x_1}^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \\ +a_{21}x_2x_1 + a_{22}{x_2}^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ +(a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}{x_n}^2. \end{array}$$

Kvadratická forma je tedy polynom v n proměnných, jehož charakteristickým rysem je, že každý sčítanec má stupeň 2.

2) Všimneme si, že pro $i, j \in \hat{n}$ a $i \neq j$ je $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_jx_i$. To nám pomůže při úloze hledat matici zadané kvadratické formy.
Např. forma ve dvou proměnných $F(x_1, x_2) = {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 2{x_2}^2$ má matici $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,
neboť $F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
(Matice kvadratické formy je totiž vždy **symetrická**.)

Definice:
a) Symetrická matice $\mathbf{A}$ řádu n se nazývá **pozitivně definitní**, je-li
$(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) > 0$ pro každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n, \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$.
b) Je-li $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) < 0$ pro každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n, \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ nazývá se matice $\mathbf{A}$ **negativně definitní**.
c) Symetrická matice $\mathbf{A}$ řádu n se nazývá **pozitivně** (resp. **negativně) semidefinitní**, je-li $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \geq 0$ (resp. $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \leq 0$) pro každý vektor

$\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n, \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ a existuje vektor $\vec{\mathbf{x}}^{(0)} \neq \vec{\mathbf{o}}$, že $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \vec{\mathbf{x}}^{(0)}) = 0$.
d) Kvadratická forma se nazývá **pozitivně (negativně) definitní (semidefinitní)**, má-li její matice tuto vlastnost.
Kvadratická forma, která nemá žádnou z těchto vlastností, se nazývá **indefinitní**.

Je-li matice **A** **hermitovská** (tj. obecně komplexní), zavádějí se analogické pojmy.

Definice:
Nechť **A** je hermitovská matice řádu n. Zobrazení $F(\vec{\mathbf{x}})$, které každému vektoru $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{C}^n$ přiřadí $F(\vec{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})$, se nazývá **hermitovská (kvadratická) forma** a matice **A** se nazývá **matice** této **hermitovské formy**.

Poznámky:
1) **Pozor !** Asistent Pytlíček ve svém skriptu užívá označení hermitovská forma pro jiný pojem.
2) Jasně $F(\vec{\mathbf{x}}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{x}_j$.

Definice:
a) Hermitovská matice **A** řádu n se nazývá **pozitivně (negativně) definitní**, je-li $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) > 0$ $((\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) < 0)$ pro každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{C}^n, \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$.
b) Hermitovská matice **A** řádu n se nazývá **pozitivně** (resp. **negativně) semidefinitní**, je-li $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \geq 0$ (resp. $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \leq 0$) pro každý vektor
$\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{C}^n, \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ a existuje vektor $\vec{\mathbf{x}}^{(0)} \neq \vec{\mathbf{o}}$, že $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \vec{\mathbf{x}}^{(0)}) = 0$.
c) Hermitovská forma se nazývá **pozitivně (negativně) definitní (semidefinitní)**, má-li její matice tuto vlastnost.
d) Hermitovská forma, která nemá žádnou z těchto vlastností, se nazývá **indefinitní**.

Poznámka:
Užitečné je uvědomit si, že matice **A** je negativně definitní (semidefinitní), právě když matice **-A** je pozitivně definitní (semidefinitní).

V následujících dvou větách vyslovíme důležitá kriteria pro testování toho, zda matice **A** je definitní.

Věta 65:
Nechť **A** je hermitovská (symetrická) matice. Pak **A** je pozitivně definitní (resp. semidefinitní), právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná (resp. nezáporná a alespoň jedno vlastní číslo rovné nule).

Důkaz:
($\Rightarrow$) Nechť **A** je pozitivně definitní. Nechť λ je její vlastní číslo a $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ odpovídající vlastní vektor. Platí
$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} \Rightarrow (\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = (\lambda\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = \lambda(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) \Rightarrow \lambda = \frac{(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})}{(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}})} > 0$.
($\Leftarrow$) Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna všechna vlastní čísla hermitovské (a tedy normální) matice **A**. Podle věty 62 existuje unitární matice **U** tak, že
$\mathbf{A} = \mathbf{U^H D U}$, přičemž

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nechť $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$. V dalších úvahách budeme užívat maticového přepisu skalárního součinu. Platí $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}^{\mathbf{H}}\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}^{\mathbf{H}}\mathbf{U}^{\mathbf{H}}\mathbf{D}\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}})^{\mathbf{H}}\mathbf{D}\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}}$.

Označme $\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Protože $\mathbf{U}$ je regulární matice, je $\vec{\mathbf{y}}$ také nenulový vektor.

Dosadíme-li za $\mathbf{D}$ a $\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}}$ jejich prvky, dostaneme

$$(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = (\bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \dots + \lambda_n|y_n|^2 > 0.$$

Poslední nerovnost je důsledkem skutečnosti, že $\lambda_i > 0$ a $y_i \geq 0$ pro $i \in \hat{n}$ a neplatí $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$.

V případě důkazu pro semidefinitní matice se pouze všechny ostré nerovnosti změní na neostré. Fakt, že u semidefinitní matice musí existovat vlastní číslo nula, plyne z toho, že kdyby všechna vlastní čísla byla kladná, je matice pozitivně definitní.

Poznámka:
Analogická věta platí pro negativně definitní (resp. semidefinitní) matice.

Věta 66:(Sylvestrovo kriterium)

Hermitovská (resp. symetrická) matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní, právě když $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\dots$, $\det \mathbf{A} > 0$.

Důkaz:

($\Rightarrow$) Nechť $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní. Ukážeme, že pak pro $k \in \hat{n}$ jsou matice $\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1k} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k} \\ \vdots \\ a_{k1}\, a_{k2} \dots a_{kk} \end{pmatrix}$ pozitivně definitní.

Nechť tedy $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ je nenulový vektor. Potom

$$(\bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_k)\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1k} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k} \\ \vdots \\ a_{k1}\, a_{k2} \dots a_{kk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = (\bar{y}_1\dots\bar{y}_k 0\cdots 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0.$$

Víme, že vlastní čísla pozitivně definitních matic jsou kladná a že determinant každé čtvercové matice je roven součinu vlastních čísel.
Platí tedy $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\dots$, $\det \mathbf{A} > 0$.

($\Leftarrow$) Označme $\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1k} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2k} \\ \vdots \\ a_{k1}\, a_{k2} \dots a_{kk} \end{pmatrix}$ a předpokládejme $\det \mathbf{A}_k > 0$ pro $k \in \hat{n}$. Matematickou indukcí podle n dokážeme, že $\mathbf{A}_n$ je pozitivně definitní. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Z indukčního předpokladu plyne, že matice $\mathbf{A}_{n-1}$ je pozitivně definitní.

Označme $d_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}_{n-1}}$ a označme $\vec{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}$ vektor, který řeší soustavu $\mathbf{A}_n \vec{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_n \end{pmatrix}$. Z Cramerova pravidla plyne $z_n = 1$, a tudíž platí vztahy

$$
\begin{aligned}
&a_{in} = -a_{i1}z_1 - a_{i2}z_2 - \dots - a_{i,n-1}z_{n-1} \qquad \text{pro } i \in \widehat{n-1}, \\
&a_{nn} = d_n - a_{n1}z_1 - a_{n2}z_2 - \dots - a_{n,n-1}z_{n-1},
\end{aligned}
$$

a tedy také (neboť $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$)

$$
\begin{aligned}
&a_{ni} = -a_{1i}\bar{z}_1 - a_{2i}\bar{z}_2 - \dots - a_{n-1,i}\bar{z}_{n-1} \qquad \text{pro } i \in \widehat{n-1}, \\
&a_{nn} = d_n - a_{1n}\bar{z}_1 - a_{2n}\bar{z}_2 - \dots - a_{n-1,n}\bar{z}_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Označme dále $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & & -z_1 \\ & 1 & & & -z_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -z_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Přezkoumáme, že platí vztah $\mathbf{A}_n = \mathbf{R}^{\mathbf{H}}\mathbf{D}\mathbf{R}$. Skutečně

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -\bar{z}_1 & -\bar{z}_2 & \cdots & -\bar{z}_{n-1} & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & & & & -z_1 \\ & 1 & & & -z_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -z_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & d_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & & & & -z_1 \\ & 1 & & & -z_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -z_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

Nechť $\vec{\mathbf{x}}$ je libovolný nenulový vektor. Označme $\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\vec{\mathbf{x}}$. Protože matice $\mathbf{R}$ je regulární, je také vektor $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$ nenulový. Označme ještě

$$\vec{\mathbf{y}}^{(n-1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Platí vztahy

$$(\mathbf{A}_n\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}^{\mathbf{H}}\mathbf{A}_n\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}^{\mathbf{H}}\mathbf{R}^{\mathbf{H}}\mathbf{D}\mathbf{R}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}^{\mathbf{H}}\mathbf{D}\vec{\mathbf{y}} =$$

$$= (\bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_{n-1}\bar{y}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_{n-1})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \bar{y}_n d_n y_n =$$

$$= (\mathbf{A}_{n-1}\vec{\mathbf{y}}^{(n-1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(n-1)}) + d_n|y_n|^2 > 0.$$

Oba poslední sčítance jsou nezáporné, protože matice $\mathbf{A}_{n-1}$ je z indukčního předpokladu pozitivně definitní a číslo d_n je kladné. Ostrá nerovnost vyplývá z toho, že když je $\vec{\mathbf{y}}$ nenulový vektor, je $y_n \neq 0$ nebo $\vec{\mathbf{y}}^{(n-1)} \neq \vec{\mathbf{o}}$.

Poznámky:

1) Analogická věta pro pozitivně semidefinitní matice **neplatí**, např. matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ má požadované subdeterminanty nezáporné, ale pozitivně semidefinitní není.
2) Snadno si rozmyslíme, že je-li $\mathbf{A}$ pozitivně definitní matice řádu n, je zobrazení $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ do $\mathbf{C}$, které vektorům $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ přiřadí číslo $(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}})$, skalární součin.

Lineární geometrie.

V této kapitole se budeme výhradně pohybovat v prostoru $\mathbf{R}^n$ se standardním skalárním součinem, tj. v **eukleidovském prostoru**. Prvky $\mathbf{R}^n$ budeme nazývat **body**, pokud je chápeme jako geometrické objekty, nebo **vektory**, pokud je chápeme jako prvky vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$.
V podstatě budeme v této kapitole pouze zobecňovat v $\mathbf{R}^n$ pojmy a poznatky, které jsou nám známé ze střední školy.

Definice:
Nechť $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^n$. **Spojnicí** bodů $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ nazveme množinu
$\{\vec{\mathbf{x}} + \lambda(\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{x}}) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} = \{(1-\lambda)\vec{\mathbf{x}} + \lambda\vec{\mathbf{y}} \mid \lambda \in \mathbf{R}\} =$
$= \{\alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} \mid \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}, \alpha + \beta = 1\}$.
Množinu $\{\alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} \mid \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}, \alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$ nazveme **úsečkou** spojující body $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$.

Snadno si rozmyslíme, že v případě prostoru $\mathbf{R}^3$ je spojnice totožná s přímkou procházející body $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ a pojem úsečka je totožný s pojmem zavedeným na střední škole. Pojmy zobecníme následující definicí.

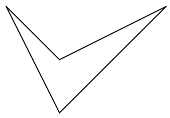
Definice:
Nechť $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ jsou body z $\mathbf{R}^n$. **Afinním obalem** těchto bodů nazveme množinu
$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\alpha = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} \mid \alpha_i \in \mathbf{R}, i \in \hat{k}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$.
Konvexním obalem těchto bodů nazveme množinu
$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\kappa = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} \mid \alpha_i \in \mathbf{R}, \alpha_i \geq 0, i \in \hat{k}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\}$.

Poznámka:
Kombinace $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ při splnění podmínky $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ se někdy nazývá **afinní kombinace** souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ a podobně tatáž kombinace při splnění podmínky $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i \in \hat{k}$ se nazývá **konvexní kombinace**.

Definice:
Množinu $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}^n$ nazveme **lineární varietou** v $\mathbf{R}^n$, jestliže
(1) $\mathbf{W} \neq \emptyset$,
(2) a platí-li implikace: $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{W}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W} \;\Rightarrow\;$ spojnice $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{y}}$ leží ve $\mathbf{W}$.

Definice:
Množinu $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^n$ nazveme **konvexní množinou** v $\mathbf{R}^n$, jestliže
(1) $\mathbf{K} \neq \emptyset$,
(2) a platí-li implikace: $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{K}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{K} \;\Rightarrow\;$ úsečka spojující $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ leží v $\mathbf{K}$.

Příklady v $\mathbf{R}^3$:
1) Lineární variety jsou: bod, přímka, rovina, celý prostor $\mathbf{R}^3$.
2) Konvexní množiny jsou bod, úsečka, trojúhelník, čtverec, kruh, krychle, koule, ale ne např. následující množina.



Věta 67:
Nechť $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)} \in \mathbf{R}^n$. Pak:
(1) (a) $\mathbf{W} = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\alpha$ je lineární varieta,
(b) $\vec{\mathbf{x}}^{(i)} \in \mathbf{W}$ pro $i \in \hat{k}$.
(2) (a) $\mathbf{K} = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\kappa$ je konvexní množina,
(b) $\vec{\mathbf{x}}^{(i)} \in \mathbf{K}$ pro $i \in \hat{k}$.

Důkaz:
(1a) Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{W} \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$

$\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W} \Longrightarrow \vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}, \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1.$

Nechť $\alpha + \beta = 1$. Potom $\alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i)\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Platí $\sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) = \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \beta \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$. Proto $\alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W}$.

(1b) $\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = 0\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + 0\vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \cdots + 1\vec{\mathbf{x}}^{(i)} + 0\vec{\mathbf{x}}^{(i+1)} + \cdots + 0\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$.

Důkaz tvrzení (2a) a (2b) je analogický, jen je třeba sledovat, že $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ a pro $i \in \hat{k}$ je $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$.

Poznámky:
1) Je zřejmé, že $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\alpha$ je nejmenší lineární varieta, která obsahuje vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ v tom smyslu, že každá varieta, která tyto vektory obsahuje, ji má za svou podmnožinu.
Obdobná poznámka platí pro $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\kappa$ a konvexní množiny.
2) Všimneme si, že afinní obal vektorů $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \vec{\mathbf{x}}^{(3)}$ v $\mathbf{R}^3$ je v obecném případě rovina a konvexní obal trojúhelník s vrcholy $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \vec{\mathbf{x}}^{(3)}$.

Věta 68:
Nechť $\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{R}^n$ a $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^n$. Pak množina $\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}$ je lineární varieta.

Důkaz:
Množina $\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}$ je jistě neprázdná, protože obsahuje bod $\vec{\mathbf{a}}$. Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}$, $\vec{\mathbf{y}} \in \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}$. Pak $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{x}}^{(1)}$, $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{y}}^{(1)}$, kde $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)} \in \mathbf{P}$.
Nechť $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{y}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{x}}^{(1)}) + \beta(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{y}}^{(1)}) =$
$= (\alpha + \beta)\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \beta\vec{\mathbf{y}}^{(1)} = \vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \beta\vec{\mathbf{y}}^{(1)} \in \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}$,
neboť $\alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \beta\vec{\mathbf{y}}^{(1)} \in \mathbf{P}$.

Příklad:
Množina řešení soustavy lineárních algebraických rovnic o n neznámých
s reálnou maticí je lineární varieta (neboť je tvaru $\tilde{\vec{\mathbf{x}}} + \mathbf{S}_0$.)

Věta 69:

Nechť $\mathbf{W}$ je lineární varieta v $\mathbf{R}^n$. Pak existuje právě jeden podprostor $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) \subset\subset \mathbf{R}^n$ tak, že pro libovolný bod $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{W}$ platí $\mathbf{W} = \vec{\mathbf{a}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W})$.

Důkaz:
Nechť $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{W}$.
(a) Najdeme podprostor $\mathcal{Z}(\mathbf{W})$ tak, že $\mathbf{W} = \vec{\mathbf{a}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W})$. Platí
$\mathbf{W} = \vec{\mathbf{o}} + \mathbf{W} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W}$. Stačí dokázat, že množina $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) = (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W}$ je podprostor v $\mathbf{R}^n$.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in (-\vec{\mathbf{a}})+\mathbf{W}$, $\vec{\mathbf{y}} \in (-\vec{\mathbf{a}})+\mathbf{W}$. Pak $\vec{\mathbf{x}} = (-\vec{\mathbf{a}})+\vec{\mathbf{x}}^{(1)}$, $\vec{\mathbf{y}} = (-\vec{\mathbf{a}})+\vec{\mathbf{y}}^{(1)}$, kde $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)} \in \mathbf{W}$.
Pak $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} = (-\vec{\mathbf{a}}) + [(-1)\vec{\mathbf{a}} + 2(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{y}}^{(1)})] \in (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W}$, neboť $(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{y}}^{(1)})$ je bod z $\mathbf{W}$, a tudíž také $[(-1)\vec{\mathbf{a}} + 2(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{y}}^{(1)})]$ je bod z $\mathbf{W}$.

Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W}$, tj. $\vec{\mathbf{x}} = (-\vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{x}}^{(1)}$, kde $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \in \mathbf{W}$, a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom
$\alpha\vec{\mathbf{x}} = -\alpha\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = (-\vec{\mathbf{a}}) + [(1-\alpha)\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)}] \in (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W}$, neboť
$[(1-\alpha)\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)}]$ je bod z $\mathbf{W}$.

(b) Dokážeme, že podprostor $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) = (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W}$ je jediný podprostor $\mathbf{R}^n$ s vlastností, že $\mathbf{W} = \vec{\mathbf{a}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W})$.
Nechť podprostor $\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{P} \neq \mathcal{Z}(\mathbf{W})$, má také vlastnost $\mathbf{W} = \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}$.
Platí $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) = (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W} = (-\vec{\mathbf{a}}) + (\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{P}) = (-\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{P} = \vec{\mathbf{o}} + \mathbf{P} = \mathbf{P}$
a to je spor.

(c) Dokážeme, že pro kterýkoliv bod $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{W}$ je $\mathbf{W} = \vec{\mathbf{b}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W})$.
Jasně platí $\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}} \in (-\vec{\mathbf{a}}) + \mathbf{W} = \mathcal{Z}(\mathbf{W})$. Platí tedy
$\vec{\mathbf{b}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W}) = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}) + \mathcal{Z}(\mathbf{W}) = \vec{\mathbf{a}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$.

Definice:
Podprostor $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) \subset\subset \mathbf{R}^n$ z věty 69 se nazývá **zaměření lineární variety $\mathbf{W}$**. Jeho dimenze se nazývá **dimenze $\mathbf{W}$**.
Varieta dimenze 0 se nazývá **bod**.
Varieta dimenze 1 se nazývá **přímka**.
Varieta dimenze 2 se nazývá **rovina**.
Varieta dimenze $n-1$ se nazývá **nadrovina**.
Každý nenulový vektor ze $\mathcal{Z}(\mathbf{W})$ se nazývá **směrový vektor** variety $\mathbf{W}$.
Každý nenulový vektor ze $\mathcal{Z}(\mathbf{W})^\perp$ se nazývá **normálový vektor** variety $\mathbf{W}$.

Popis lineární variety $\mathbf{W} \subset \mathbf{R}^n$:

Nechť $\dim \mathbf{W} = k$. Jedna možnost jak varietu popsat, je psát ji ve tvaru $\mathbf{W} = \vec{\mathbf{a}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W})$. Uvedeme další možnosti.

(a) Nechť $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{W}$ a $(\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{a}}^{(k)})$ je báze $\mathcal{Z}(\mathbf{W})$, tj. $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) = [\vec{\mathbf{a}}^{(1)}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{a}}^{(k)}]_\lambda$.

$$\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{W} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{\mathbf{a}}^{(i)}, \quad \text{kde } t_i \in \mathbf{R} \text{ pro } i \in \hat{k}.$$

Poslední rovnici říkáme **směrová rovnice variety**.

Pokud označíme $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ a $\vec{\mathbf{a}}^{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_n^{(i)} \end{pmatrix}$ pro $i \in \hat{k}$, můžeme směrovou rovnici rozepsat po složkách a získáme tzv. **parametrické rovnice variety $\mathbf{W}$**

$$\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \sum\limits_{i=1}^{k} t_i a_1^{(i)} \\ x_2 = a_2 + \sum\limits_{i=1}^{k} t_i a_2^{(i)} \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n + \sum\limits_{i=1}^{k} t_i a_n^{(i)} \end{array} \quad , \quad t_i \in \mathbf{R} \text{ pro } i \in \hat{k}.$$

(b) Nechť $(\vec{\mathbf{w}}^{(1)}, \vec{\mathbf{w}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{w}}^{(n-k)})$ je báze $\mathcal{Z}(\mathbf{W})^{\perp}$. Pro $i \in \widehat{n-k}$ označme $c_i = (\vec{\mathbf{w}}^{(i)}, \vec{\mathbf{a}})$.

Potom $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{W} \iff \vec{\mathbf{x}} \in \vec{\mathbf{a}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W}) \iff \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{Z}(\mathbf{W}) \iff (\vec{\mathbf{w}}^{(i)}, \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}}) = 0$ pro $i \in \widehat{n-k} \iff (\vec{\mathbf{w}}^{(i)}, \vec{\mathbf{x}}) = c_i$ pro $i \in \widehat{n-k}$.

Pokud označíme $\vec{\mathbf{w}}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_1^{(i)} \\ w_2^{(i)} \\ \vdots \\ w_n^{(i)} \end{pmatrix}$ pro $i \in \widehat{n-k}$, můžeme poslední rovnice rozepsat po složkách a dostaneme

$$\begin{array}{rcl} w_1^{(1)} x_1 + w_2^{(1)} x_2 + \cdots + w_n^{(1)} x_n & = & c_1 \\ w_1^{(2)} x_1 + w_2^{(2)} x_2 + \cdots + w_n^{(2)} x_n & = & c_2 \\ & \vdots & \\ w_1^{(n-k)} x_1 + w_2^{(n-k)} x_2 + \cdots + w_n^{(n-k)} x_n & = & c_{n-k} \end{array} .$$

Těmto rovnicím říkáme **normálové** (neparametrické) **rovnice variety**.

(c) Nechť $\mathbf{W} = [\vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_{\alpha}$. Víme, že $\mathbf{W}$ je lineární varieta. Dokážeme, že její zaměření je $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}]_{\lambda}$.
Z důkazu věty 69 víme, že $\mathcal{Z}(\mathbf{W}) = (-\vec{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{W}$.
Je tedy $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}]_{\lambda} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{W})$.
Dokážeme opačnou inkluzi.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in (-\vec{\mathbf{x}}^{(0)}) + \mathbf{W} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)}$, kde $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{W} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}} = \alpha_0 \vec{\mathbf{x}}^{(0)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, přičemž $\alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
Je tedy $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)} = \alpha_0 \vec{\mathbf{x}}^{(0)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} - (\alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i) \vec{\mathbf{x}}^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{\mathbf{x}}^{(i)} - \vec{\mathbf{x}}^{(0)})$.

Definice:
Nechť $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ jsou lineární variety v $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{W}_1 \neq \mathbf{W}_2$. Říkáme, že $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ jsou:
(a) **rovnoběžné** $\iff \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1) \subset \mathcal{Z}(\mathbf{W}_2)$ nebo $\mathcal{Z}(\mathbf{W}_2) \subset \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1)$,
(b) **mimoběžné** $\iff$ nejsou rovnoběžné a $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \emptyset$,
(c) **různoběžné** $\iff$ nejsou rovnoběžné a $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \neq \emptyset$.

Věta 70:
Průnik lineárních variet v $\mathbf{R}^n$ je buď prázdná množina, nebo lineární varieta.

Důkaz:
Důkaz stačí provést pouze pro dvě variety $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$.

Nechť $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \neq \emptyset$, označme $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.
Pro $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W}$ ukážeme, že také spojnice $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ leží ve $\mathbf{W}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Neboť } \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W_1} \Rightarrow \text{spojnice je ve } \mathbf{W}_1 \\ \text{neboť } \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W_2} \Rightarrow \text{spojnice je ve } \mathbf{W}_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{spojnice je ve } \mathbf{W}.$$

Vzdálenost lineárních variet.

(a) **Pojem vzdálenosti množin v $\mathbf{R}^n$.**

Definice:
Nechť $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{R}^n$. Číslo $\inf\{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\| \mid \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{M}_1, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{M}_2\}$ nazýváme **vzdálenost množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$** a značíme ho $\rho(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$.
Vzdálenost bodu $\vec{\mathbf{a}}$ od množiny $\mathbf{M}$ značíme $\rho(\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{M})$ (místo $\rho(\{\vec{\mathbf{a}}\}, \mathbf{M})$).

Poznámka:
Z definice plyne, že vzdáleností bodů $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ nazýváme číslo $\rho(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$.

(b) **Vzdálenost bodu od podprostoru.**

Poznámka:
Snadno si rozmyslíme, že každý podprostor $\mathbf{P}$ v $\mathbf{R}^n$ je varieta (neboť ho lze psát ve tvaru $\vec{\mathbf{o}} + \mathbf{P}$)) a že varieta je podprostor, právě když obsahuje $\vec{\mathbf{o}}$, tj. když „prochází počátkem“. Takovou varietu $\mathbf{W}$ lze totiž podle věty 69 psát ve tvaru $\vec{\mathbf{o}} + \mathcal{Z}(\mathbf{W})$.

Věta 71:
Nechť $\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{R}^n$, $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^n$. Nechť $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}^{(1)} + \vec{\mathbf{a}}^{(2)}$, kde $\vec{\mathbf{a}}^{(1)} \in \mathbf{P}, \vec{\mathbf{a}}^{(2)} \in \mathbf{P}^\perp$. Pak $\rho(\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{P}) = \|\vec{\mathbf{a}}^{(2)}\|$.

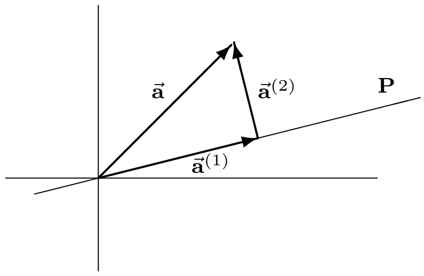
Důkaz:
Nechť $\vec{\mathbf{x}}$ je libovolný bod z $\mathbf{P}$. Potom $\|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{a}}^{(1)} + \vec{\mathbf{a}}^{(2)} - \vec{\mathbf{x}}\|^2 =$

$$= ((\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, (\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{a}}^{(2)}) \overset{\substack{(\text{neboť } (\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}) \in \mathbf{P} \\ \text{a } \vec{\mathbf{a}}^{(2)} \in \mathbf{P}^\perp)}}{=} \|\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{a}}^{(2)}\|^2 \geq \|\vec{\mathbf{a}}^{(2)}\|^2.$$

Pro $\vec{\mathbf{x}}$ z $\mathbf{P}$ je tedy $\|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}\| \geq \|\vec{\mathbf{a}}^{(2)}\|$. Jelikož při volbě $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}}^{(1)}$ je

$\|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}^{(2)}\|$, je $\rho(\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{P}) = \inf\limits_{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}} \|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{a}}^{(2)}\|$.

Poznámka:
Z následujícího obrázku je zřejmé, že vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od podprostoru je v případě $\mathbf{R}^2$ v souhlase s definicí vzdálenosti bodu s průvodičem $\vec{\mathbf{a}}$ od přímky $\mathbf{P}$ procházející počátkem.



(c) **Vzdálenost dvou variet.**

Věta 72:
Nechť $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ jsou dvě variety v $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{W}_1 = \vec{\mathbf{a}}^{(1)} + \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1)$,
$\mathbf{W}_2 = \vec{\mathbf{a}}^{(2)} + \mathcal{Z}(\mathbf{W}_2)$. Potom $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \rho\Big(\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1) + \mathcal{Z}(\mathbf{W}_2)\Big)$.

Důkaz:
$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \inf\Big\{\|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\| \mid \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{W}_1, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{W}_2\Big\} =$
$= \inf\Big\{\|\vec{\mathbf{a}}^{(1)} + \vec{\mathbf{x}}^{(1)} - \vec{\mathbf{a}}^{(2)} - \vec{\mathbf{x}}^{(2)}\| \mid \vec{\mathbf{x}}^{(1)} \in \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1), \vec{\mathbf{x}}^{(2)} \in \mathcal{Z}(\mathbf{W}_2)\Big\} =$
$= \inf\Big\{\|\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{a}}^{(2)} + \vec{\mathbf{p}}\| \mid \vec{\mathbf{p}} \in \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1) + \mathcal{Z}(\mathbf{W}_2)\Big\} =$
$= \rho\Big(\vec{\mathbf{a}}^{(1)} - \vec{\mathbf{a}}^{(2)}, \mathcal{Z}(\mathbf{W}_1) + \mathcal{Z}(\mathbf{W}_2)\Big)$.